

第4問

(1) a を正の実数とする。 $\frac{1}{4}a^2 + a + 1 = \left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\right)a + 1)^2$

であり、また

$$0 < a + 1 < \frac{1}{4}a^2 + a + 1$$

であるので、

$$\sqrt{a+1} < \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}a + 1 \dots\dots\dots\text{①}$$

となる。

(2) 2次不等式 $\left(\frac{12}{25}a + 1\right)^2 < a + 1$ を解くと

$0 < a < \frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオカ}}}$ となる。よって、 $0 < a < \frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオカ}}}$ のとき

$$\frac{12}{25}a + 1 < \sqrt{a+1} \dots\dots\dots\text{②}$$

が成り立つ。

(3) (1) と (2) の結果を用いて、 $\sqrt{17}$ のおよその値を求める。

$\frac{\sqrt{17}}{4} = \sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{キク}}} + 1}$ である。 $a = \frac{1}{\boxed{\text{キク}}}$ を①に代入すると

$\frac{\sqrt{17}}{4} < \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ となり、②に代入すると $\frac{\boxed{\text{スセソ}}}{\boxed{\text{タチツ}}} < \frac{\sqrt{17}}{4}$ となる。

したがって、

$$\frac{m}{200} < \sqrt{17} < \frac{m+1}{200} \dots\dots\dots\text{③}$$

を満たす自然数 m は テトナ である。③より $\sqrt{17}$ の小数第3位を四捨五入すると 4. ニヌ となる。

(1)

$$\frac{1}{4} a^2 + a + 1 = \left(\frac{1}{2} a + 1 \right)^2 \text{ となるため}$$

$$\sqrt{a+1} < \frac{1}{2} a + 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

(2)

$$\left(\frac{12}{25} a + 1 \right)^2 - (a + 1) = \frac{1}{25} (144 a^2 - 25a)$$

より

$$\begin{aligned} \left(\frac{12}{25} a + 1 \right)^2 < a + 1 &\Rightarrow a(144 a - 25) < 0 \\ &\Rightarrow 0 < a < \frac{25}{144} \end{aligned}$$

よって、上記の範囲で

$$\frac{12}{25} a + 1 < \sqrt{a+1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

$$(3) \quad \frac{\sqrt{17}}{4} = \sqrt{\frac{17}{16}} = \sqrt{\frac{1}{16} + 1} \text{ である。} a = \frac{1}{16} \text{ を} \textcircled{1} \text{ に代入すると}$$

$$\frac{\sqrt{17}}{4} = \sqrt{\frac{1}{16} + 1} < \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} + 1 = \frac{33}{32}$$

となる。また $0 < \frac{1}{16} = \frac{9}{144} < \frac{25}{144}$ より $a = \frac{1}{16}$ のとき ② の条件が成り立つ。

$$\frac{12}{25} \times \frac{1}{16} + 1 = \frac{103}{100} < \frac{\sqrt{17}}{4} \dots\dots\dots ②$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{103}{100} < \frac{\sqrt{17}}{4} < \frac{33}{32} &\Rightarrow \frac{103}{25} < \sqrt{17} < \frac{33}{8} \\ &\Rightarrow \frac{824}{200} < \sqrt{17} < \frac{825}{200} \end{aligned}$$

となり、③の条件を満たす自然数 m は **824** であることが分かる。

$$\frac{824}{200} = 4.12$$

$$\frac{825}{200} = 4.125$$

より $\sqrt{17}$ の小数第3位を四捨五入すると **4.12** となる。