

2012 年度センター試験 数学 1A

第 2 問

a, b を定数として 2 次関数

$$y = -x^2 + (2a + 4)x + b \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

について考える。関数 ① のグラフ G の頂点の座標は

$$(a + \boxed{\text{ア}}, a^2 + \boxed{\text{イ}}a + b + \boxed{\text{ウ}})$$

である。以下、この頂点が直線 $y = -4x - 1$ 上にあるとする。このとき

$$b = -a^2 - \boxed{\text{エ}}a - \boxed{\text{オカ}}$$

である。

(1) グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。また、 G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わるような a の値の範囲は

$$-\boxed{\text{コ}} - \sqrt{\boxed{\text{サ}}} < a < -\boxed{\text{コ}} + \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(2) 関数 ① の $0 \leq x \leq 4$ における最小値が -22 となるのは

$$a = \boxed{\text{シス}} \text{ または } a = \boxed{\text{セ}}$$

のときである。また $a = \boxed{\text{セ}}$ のとき、関数 ① の $0 \leq x \leq 4$ における最大値は $\boxed{\text{ソタチ}}$ である。

一方、 $a = \boxed{\text{シス}}$ のときの ① のグラフを x 軸方向に、 y 軸方向にだけ平行移動すると、 $a = \boxed{\text{セ}}$ のときのグラフと一致する。

関数 ① の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} -x^2 + (2a + 4)x + b &= -\{x - (a + 2)\}^2 + (a + 2)^2 + b \\ &= -\{x - (a + 2)\}^2 + a^2 + 4a + b + 4 \end{aligned}$$

となるため、① のグラフ G の頂点の座標は

$$(a + 2, a^2 + 4a + b + 4)$$

である。

この頂点が直線 $y = -4x - 1$ 上にあるとき

$$\begin{aligned} a^2 + 4a + b + 4 &= -4(a + 2) - 1 \\ \Rightarrow b &= -a^2 - 8a - 13 \end{aligned}$$

以下、上の条件が成り立つものとする。

(1) グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるとき、関数 ① の右辺の式に対する 2 次方程式の判別式が正の値を持つ。判別式は

$$\begin{aligned} (2a + 4)^2 - 4 \times (-1) \times b &= 4\{(a^2 + 4a + 4) - a^2 - 8a - 13\} \\ &= -4(4a + 9) \end{aligned}$$

となるため、条件を満たす a の範囲は

$$-4(4a + 9) > 0 \Rightarrow a < \frac{-9}{4}$$

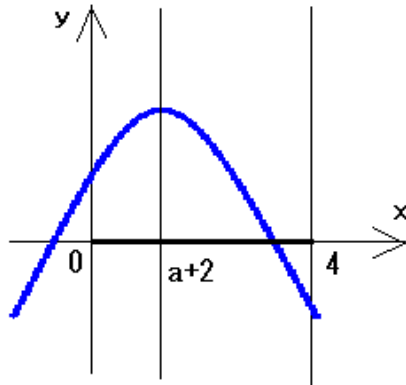
また、G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わるとき、 x^2 の係数が負であるため $x = 0$ のときの y 座標 $b = -a^2 - 8a - 13$ が正である。よって条件を満たす a の範囲は

$$-a^2 - 8a - 13 > 0 \Rightarrow -4 - \sqrt{3} < a < -4 + \sqrt{3}$$

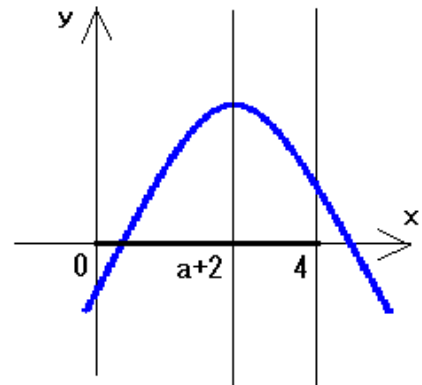
(2) 関数 ① の $0 \leq x \leq 4$ における最小値について

$a + 2 \leq 2 \Rightarrow a \leq 0$ のとき、 $x = 4$ で最小値をとる。

$a + 2 > 2 \Rightarrow a > 0$ のとき、 $x = 0$ で最小値をとる。



$a+2 \leq 2$ のときのグラフ



$a+2 > 2$ のときのグラフ

$a \leq 0$ のときの最小値は

$$\begin{aligned} & -4^2 + (2a + 4) \times 4 - a^2 - 8a - 13 \\ & = -a^2 - 13 \end{aligned}$$

この値が -22 となるとき

$$-a^2 - 13 = -22 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$a \leq 0$ より $a = -3$

$a > 0$ のときの最小値は $-a^2 - 8a - 13$. この値が -22 となるとき

$$\begin{aligned} -a^2 - 8a - 13 = -22 & \Rightarrow a^2 + 8a - 9 = 0 \\ & \Rightarrow a = -9, 1 \end{aligned}$$

$a > 0$ より $a = 1$

$a = 1$ のとき関数 ① は

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 6x - 22 \\ &= -(x - 3)^2 - 13 \end{aligned}$$

となるため、 $0 \leq x \leq 4$ における最大値は $x = 3$ のときの **-13** である。

$a = -3$ のとき関数 ① は

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 2x + 2 \\ &= -(x + 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

となる。 $a = -3, 1$ のときの関数 ① のグラフの頂点の座標はそれぞれ $(-1, 3), (3, -13)$ である。二つの関数は x^2 の係数が等しいため、頂点を平行移動して一致させれば、グラフも一致できる。

以上から $a = -3$ のときのグラフを x 軸方向に $3 - (-1) = 4$ 、 y 軸方向に $-13 - 3 = -16$ だけ平行移動すると、 $a = 1$ のときのグラフと一致する。