

2012 年度センター試験 数学 1A

第 3 問

$\triangle ABC$ において、 $AB = AC = 3$, $BC = 2$ であるとき

$$\cos \angle ABC = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \sin \angle ABC = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}},$$

であり、 $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ 、 $\triangle ABC$ の内接円 I の半径は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

また、円 I の中心から点 B までの距離は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(1) 辺 AB 上の点 P と辺 BC 上の点 Q を、 $BP = BQ$ かつ $PQ =$

$\frac{2}{3}$ となるようにとる。このとき、 $\triangle PBQ$ の外接円 O の直径は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$

であり、円 I と円 O は $\boxed{\text{セ}}$ 。ただし、 $\boxed{\text{セ}}$ には次の ① ~ ④ から当てはまるものを一つ選べ。

- | | | |
|---------------|-------------|--------|
| ① 重なる (一致する) | ① 内接する | ② 外接する |
| ③ 異なる 2 点で交わる | ④ 共有店を持たない。 | |

(2) 円 I 上に点 E と点 F を、3 点 C, E, F が一直線上にこの順に並び、

かつ、 $CF = \sqrt{2}$ となるようにとる。このとき

$$CE = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}, \frac{EF}{CE} = \boxed{\text{チ}}$$

である。

さらに、円 I と辺 BC との接点を D 、線分 BE と線分 DF との交点を G 、線分 CG の延長と線分 BF との交点を M とする。こ

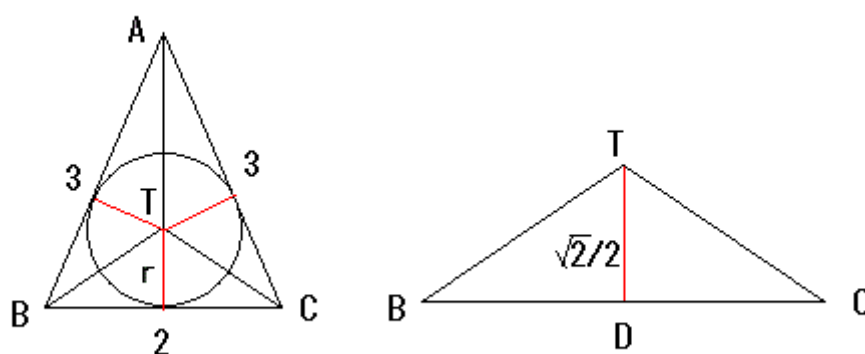
のとき、 $\frac{GM}{CG} = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$\triangle ABC$ に余弦定理を使うと

$$3^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \angle ABC \Rightarrow \cos \angle ABC = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 \angle ABC = 1 - \cos^2 \angle ABC = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \sin \angle ABC = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



以上から

$$\triangle ABC \text{ の面積} = 3 \times 2 \times \sin \angle ABC / 2 = 2\sqrt{2}$$

内接円 I の中心を T 、半径を r とすると面積に関して

$$ABC = TAB + TBC + TCA$$

がなりたつため、

$$3 \times r \times \frac{1}{2} + 3 \times r \times \frac{1}{2} + 2 \times r \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I と BC との接点を D とする。 $\triangle ABC$ は $AB = AC$ より
 $\angle ABC = \angle ACB$ が成り立つ。

よって

$$\angle TBD = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle ACB = \angle TCD$$

また、 $\angle TDB = \angle TDC = 90^\circ$ 、 $TD = TD$ であるため $\triangle BDT$ と
 $\triangle CDT$ は合同な直角三角形である。よって $BD = BC \div 2 = 1$ 、 TD は

I の半径であるため $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。以上より I の中心 T と B との距離は

$$TB = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

である。

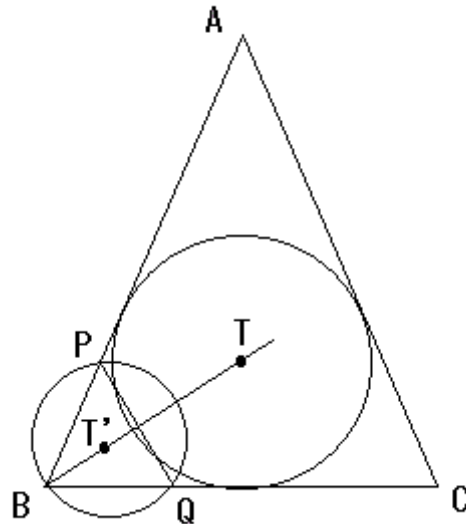
(1)

辺 AB 上の点 P と辺 BC 上の点 Q を、 $BP = BQ$ かつ $PQ = \frac{2}{3}$
となるようにとる。

$$\sin \angle PBQ = \sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。 $\triangle PBQ$ の外接円 O の半径を R とすると正弦定理より、直径 $2R$
は以下の値になる。

$$2R = \frac{PQ}{\sin \angle PBQ} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



外接円 O の中心を T' として I の中心 T との関係を見る。 T' は PQ の垂直二等分線上にあるが、 $BP = BQ$ よりこの垂直二等分線は $\angle B$ の二等分線でもある。よって B, T, T' は $\angle B$ の二等分線上にある。

$$BT' = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad BT = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{より} \quad TT' = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

一方、

$$\text{円 } I, O \text{ の半径の和} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{円 } I, O \text{ の半径の差} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

であるため、2 円の中心間の距離は 2 円の半径の差より大きく、半径の和より小さい。よって円 I と O は ② 異なる 2 点で交わる。

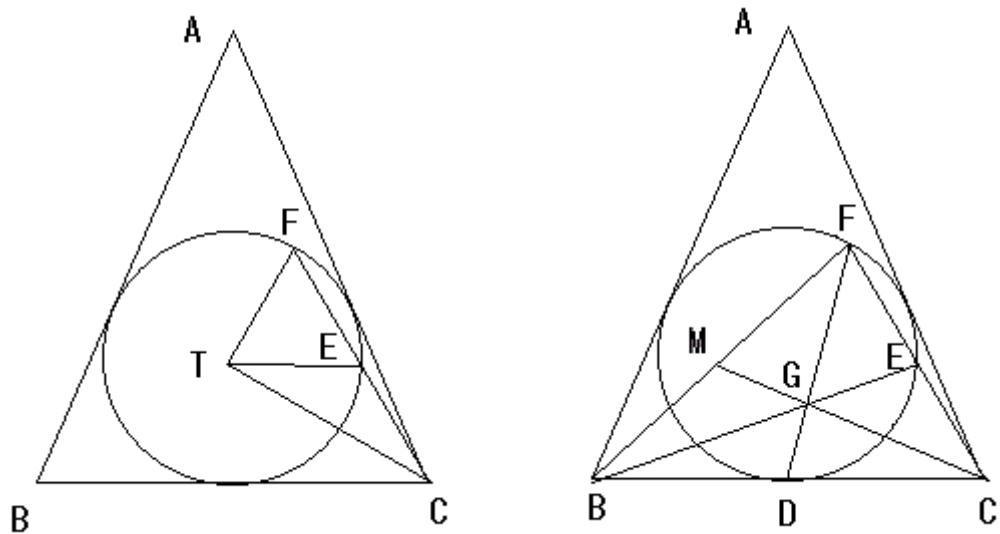
(2)

円 I に点 E, F を、3 点 C, E, F が一直線上にこの順に並び、かつ $CF = \sqrt{2}$

となるようにとる。このとき $\triangle CTF$ について

$$CT = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad TF = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad CF = \sqrt{2}$$

より $CT:TF:CF = \sqrt{3}:1:2$ が成り立つ。つまり $\triangle CTF$ は $\angle CTF = 90^\circ$, $\angle CFT = 60^\circ$ である直角三角形。さらに $\triangle TEF$ は $TE = TF$, $\angle EFT = \angle CFT = 60^\circ$ より正三角形となり $EF = \sqrt{2}/2$ 。



以上より

$$CE = CF - EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

つまり $CE = EF$ であるため、

$$\frac{EF}{CE} = 1$$

$\triangle BCF$ について、点 D は辺 BC の中点、点 E は辺 CF の中点になるため、 G は $\triangle BCF$ の重心となる。つまり CM は辺 BE に対する中線になる。よって

$$\frac{GM}{CG} = \frac{1}{2}$$