2012年度センター試験 数学 1A

第4問

1 から 9 までの数字が一つずつ書かれた 9 枚のカードから 5 枚のカードを同時に取り出す。このようなカードの取り出し方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。

(1) 取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがある取り出し方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りであり、5 と書かれたカードがない取り出し方は $\boxed{\text{カキ}}$ 通りである。

(2) 次のように得点を定める。

- 取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがない場合は、得点を 0 点とする。
- 取り出した 5 枚のカードの中に 5 と書かれたカードがある場合、この 5 枚を書かれている数の小さい順に並べ、5 と書かれたカードが小さいほうから k 番目にあるとき、得点を k 点とする。

得点が 0 点となる確率は $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。得点が 1 点となる確率は

$\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシス}}}$ で、得点が 2 点となる確率は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ 、得点が 3 点となる確

率は $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

また、得点の期待値は $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

9 枚のカードから 5 枚のカードを同時に取り出す方法は

$$\binom{9}{5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ 通り}$$

- (1) 5枚のカードの中に5と書かれたカードがあるようなカードの組み合わせは、5以外の8枚のカードから4枚を取り出し5と書かれたカードを合わせれば作ることができる。よって条件を満たすカードの取り出し方は

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ 通り}$$

一方、5と書かれたカードがない取り出し方は

$$126 - 70 = 56 \text{ 通り}$$

- (2) 5枚のカードについて問題の条件に合わせて得点を決めたとき、得点が0点となる、つまり5と書かれたカードがない取り出し方は(1)より56通りある。このことから0点となる確率は

$$\frac{56}{126} = \frac{4}{9}$$

以下の計算のため1~4と書かれたカードの集合をA、6~9と書かれたカードの集合をBと表すことにする。

得点が1点となるとき、5枚のカードの数字の中で5が一番小さい数字である。このことから5と書かれたカードが以外の4枚のカードはBの4枚のカードであることが分かる。つまり得点が1点となるカードの組み合わせは1通りしかない。よって得点が1点となる確率は

$$\frac{1}{126}$$

得点が2点となるとき、5枚のカードの数字の中で5より小さい数字が1個、5より大きい数字が3個ある。このようなカードの組み合わせはAから1枚、Bから3枚、そして5と書かれたカ

一ドの組み合わせのみである。つまり得点が 2 点となるカードの取り出し方は

$$\binom{4}{1} \times \binom{4}{3} = 4 \times 4 = 16 \text{ 通り}$$

以上から得点が 2 点となる確率は

$$\frac{16}{126} = \frac{8}{63}$$

一般に得点が k 点となるカードの組み合わせは「A から $k-1$ 枚、5 と書かれたカード、B から $5-k$ 枚」となる。このことから

得点が 3 点となるカードの取り出し方は $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 36$ 通り。よって得点が 3 点となる確率は

$$\frac{36}{126} = \frac{2}{7}$$

また得点が 4 点、5 点となる確率はそれぞれ $\frac{8}{63}$ 、 $\frac{1}{126}$ となる。

以上から得点の期待値は

$$\begin{aligned} 1 \times \frac{1}{126} + 2 \times \frac{8}{63} + 3 \times \frac{2}{7} + 4 \times \frac{8}{63} + 5 \times \frac{1}{126} &= \frac{210}{126} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$