2012年度センター試験　数学2B

第1問

［1］$a > 0,\ a \neq 0$ として、不等式

$$2\log_a(8-x) > \log_a(x-2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x の値の範囲を求めよう。

真数が正であるから、$\boxed{ア} < a < \boxed{イ}$ が成り立つ。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、a を底といい、b を真数という。

底 a が $a < 1$ を満たすとき、不等式 ① は

$$x^2 - \boxed{ウエ}\, x + \boxed{オカ}\ \boxed{キ}\ 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。ただし、$\boxed{キ}$ については、当てはまるものを、次の ⓪～② のうちから一つ選べ。

⓪ ＜　　　① ＝　　　② ＞

したがって、真数が正であることと ② から、$a < 1$ のとき、不等式 ① を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{ク} < a < \boxed{ケ}$ である。

同様にして、$a > 1$ のときには、不等式 ① を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{コ} < a < \boxed{サ}$ であることが分かる。

真数が正であることから

$$8 - x > 0, \qquad x - 2 > 0 \Rightarrow \mathbf{2} < x < \mathbf{8}$$

が成り立つ。

① の左辺について

$$2\log_a(8-x) = \log_a(8-x)^2$$

が成り立つ。よって、底 a が $a < 1$ を満たすとき

$$\begin{aligned}(8-x)^2 < x-2 &\Rightarrow x^2 - \mathbf{17}x + \mathbf{66} < 0 \\ &\Rightarrow (x-6)(x-11) < 0 \\ &\Rightarrow 6 < x < 11\end{aligned}$$

この範囲と $2 < x < 8$ より、$a < 1$ のとき ① を満たす x の範囲は $\mathbf{6 < x < 8}$ である。

$a > 1$ のときも同様に考えると

$$\begin{aligned}(8-x)^2 > x-2 &\Rightarrow x^2 - 17x + 66 > 0 \\ &\Rightarrow x < 6, \qquad 11 < x\end{aligned}$$

この範囲と $2 < x < 8$ より、$a > 1$ のとき ① を満たす x の範囲は $\mathbf{2 < x < 6}$ である。

［2］$0 \leq \alpha \leq \pi$ として

$$\sin\alpha = \cos 2\beta$$

を満たす β について考えよう。ただし $0 \leq \beta \leq \pi$ とする。

たとえば、$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ のとき、β のとり得る値は $\dfrac{\pi}{\boxed{シ}}$ と $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{シ}}\pi$ の二つである。

このように、α の各値に対して、β のとり得る値は二つある。そのうちの小さいほうを β_1、大きいほうを β_2 とし

$$y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$$

が最大となる α の値とそのときの y の値を求めよう。

β_1, β_2 を α を用いて表すと、$0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\boxed{セ}} - \frac{\alpha}{\boxed{ソ}},\ \beta_2 = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{セ}}\pi + \frac{\alpha}{\boxed{ソ}}$$

となり、$\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ のときは

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{\boxed{チ}} + \frac{\alpha}{\boxed{ツ}},\ \beta_2 = \frac{\boxed{テ}}{\boxed{チ}}\pi - \frac{\alpha}{\boxed{ツ}}$$

となる。

したがって、$\alpha + \dfrac{\beta_1}{2} + \dfrac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}\pi$$

である。よって y が最大となる α の値の範囲は $\dfrac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハヒ}}\pi$ であり、その時の y の値は $\boxed{フ}$ であることが分かる。$\boxed{フ}$ に当てはまるものを、次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

⓪ $\frac{1}{2}$ ① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき、$\cos 2\beta = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. $0 \leq 2\beta \leq 2\pi$ より β の値は

$$2\beta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{\mathbf{6}},\ \frac{\mathbf{5}}{6}\pi$$

各 α に対して、β のとり得る値は二つある。小さいほうを β_1、大きいほうを β_2 とする。

$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin\alpha = \cos 2\beta$ を満たす β は $0 \leq 2\beta \leq 2\pi$ より

$$2\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,\quad \frac{3}{2}\pi + \alpha \Rightarrow \beta_1 = \frac{\pi}{\mathbf{4}} - \frac{\alpha}{\mathbf{2}},\quad \beta_2 = \frac{\mathbf{3}}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}$$

このとき

$$\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \alpha + \frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{6}$$
$$= \frac{3}{8}\pi + \frac{11}{12}\alpha$$

となるため

$$\frac{3}{8}\pi \leq \frac{3}{8}\pi + \frac{11}{12}\alpha < \frac{5}{6}\pi$$

同様にして $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ のとき $\sin\alpha = \cos 2\beta$ を満たす β は

$$2\beta = -\frac{\pi}{2} + \alpha,\quad \frac{5}{2}\pi - \alpha \Rightarrow \beta_1 = -\frac{\pi}{\mathbf{4}} + \frac{\alpha}{\mathbf{2}},\quad \beta_2 = \frac{\mathbf{5}}{4}\pi - \frac{\alpha}{2}$$

このとき

$$\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \alpha - \frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{4} + \frac{5\pi}{12} - \frac{\alpha}{6}$$
$$= \frac{7}{24}\pi + \frac{13}{12}\alpha$$

となるため

$$\frac{5}{6}\pi \leq \frac{7}{24}\pi + \frac{13}{12}\alpha \leq \frac{11}{8}\pi$$

したがって $\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}\pi$$

$$\Rightarrow \sin\frac{11}{8}\pi \leq y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right) \leq 1$$

よって y の最大値は ① 1 で、このとき $\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \frac{\pi}{2}$ 。この値をとるのは $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲のときであり、α の値を求めると

$$\frac{3}{8}\pi + \frac{11}{12}\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{22}}\pi$$

となる。