

2012 年度センター試験 数学 2B

第 2 問

座標平面上で曲線 $y = x^3$ を C とし、放物線 $y = x^2 + px + q$ を D とする。

(1) 曲線 C 上の点 $P(a, a^3)$ における C の接線の方程式は

$$y = 3a^{\boxed{\text{ア}}}x - \boxed{\text{イ}}a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。放物線 D は点 P を通り、 D の P における接線と、 C の P における接線が一致するとする。このとき、 p と q を a を用いて表すと

$$\begin{cases} p = 3a^{\boxed{\text{エ}}} - \boxed{\text{オ}}a \\ q = \boxed{\text{カキ}}a^3 + a^{\boxed{\text{ク}}} \end{cases} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

以下、 p, q は ① を満たすとする。

(2) 放物線 D が y 軸上の与えられた点 $Q(0, b)$ を通るとき

$$b = \boxed{\text{ケコ}}a^2 + a^{\boxed{\text{サ}}}$$

が成り立つ。与えられた b に対して、② を満たす a の値の個数を調べよう。

そのために、関数

$$f(x) = \boxed{\text{ケコ}}a^2 + a^{\boxed{\text{サ}}}$$

の増減を調べる。関数 $f(x)$ は、 $x = \boxed{\text{シ}}$ で極小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとり $x = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ で

極大値 $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ をとる。

関数 $y = f(x)$ のグラフをかくことにより、 $\boxed{\text{ス}} < b < \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ のとき、②

を満たす a の値の個数は $\boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

(3) 放物線 D の頂点が x 軸上にあるのは $a = \boxed{1}, \boxed{\frac{1}{2}}$ の二つの場合である。

$a = \boxed{1}$ のときの放物線を D_1 、 $a = \boxed{\frac{1}{2}}$ のときの放物線を D_2 とする。

D_1, D_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{2\boxed{3}}{3\boxed{2}}$ である。

(1) 曲線 C 上の点 $P(a, a^3)$ における C の接線の方程式は $y' = 3x^2$ より

$$\begin{aligned} y &= 3a^2(x - a) + a^3 \\ &= 3a^2x - 2a^3 \end{aligned}$$

放物線 D が点 P を通り、 D の P における接線と、 C の P における接線が一致するとき、 P は D 上にあるため、

$$a^3 = a^2 + pa + q \Rightarrow q = -ap + a^3 - a^2$$

このとき D の P における接線は $y' = 2x + p$ より

$$\begin{aligned} y &= (2a + p)(x - a) + q \\ &= (2a + p)x - 2ap + a^3 - 3a^2 \end{aligned}$$

この接線が C の接線と一致するため

$$2a + p = 3a^2 \Rightarrow p = 3a^2 - 2a$$

これを $q = -ap + a^3 - a^2$ に代入すると

$$\begin{aligned} q &= -a(3a^2 - 2a) + a^3 - a^2 \\ &= -2a^3 + a^2 \end{aligned}$$

D が y 軸上の点 $Q(0, b)$ を通るとき

$$b = q = -2a^3 + a^2 \dots\dots\dots ②$$

関数

$$f(x) = -2x^3 + x^2$$

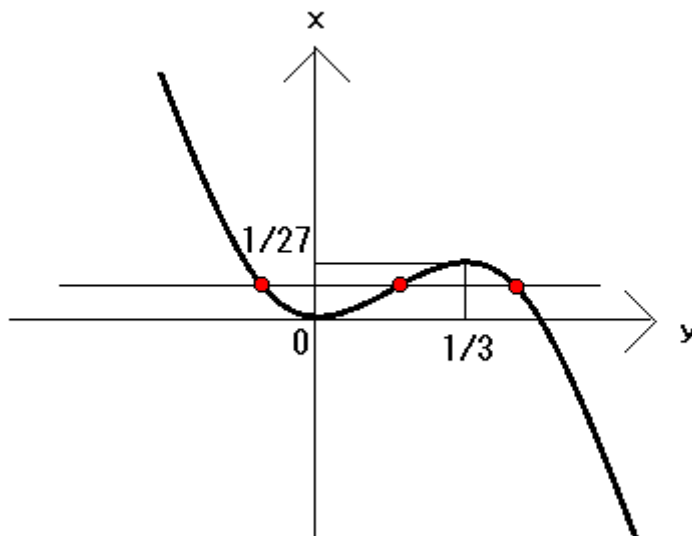
の増減を調べる。

$$f'(x) = -6x^2 + 2x = -2x(3x - 1)$$

より関数 $f(x)$ の増減は以下の通り

x		0		$1/3$	
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	減少	0	増加	$1/27$	減少

よって $f(x)$ は $x = 0$ で極小値 0 、 $x = \frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{1}{27}$ をとる。



グラフをかくことにより、 $0 < b < \frac{1}{27}$ のとき ② を満たす a の値の個数は **3** であることが分かる。

放物線 D の頂点の座標は $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 - p^2/4 + q$ より

$$\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4} + q\right)$$

頂点が x 軸上にあるとき、頂点の y 座標は 0 になる。

$$\begin{aligned} -\frac{p^2}{4} + q &= -\frac{1}{4}((3a^2 - 2a)^2 - 4(-2a^3 + a^2)) \\ &= -\frac{1}{4}(9a^4 - 4a^3) \end{aligned}$$

より

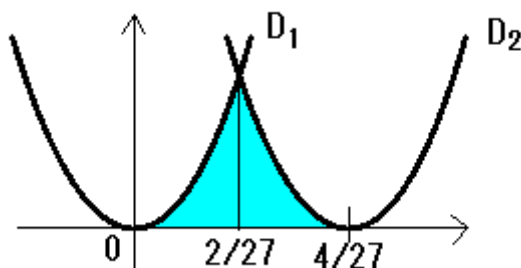
$$-\frac{p^2}{4} + q = 0 \Rightarrow a^3(9a - 4) = 0 \Rightarrow a = 0, \frac{4}{9}$$

$a = 0$ のときの放物線 D_1 の方程式は $y = x^2$

$a = \frac{4}{9}$ のときの放物線 D_2 の方程式は $y = x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{16}{729} = \left(x - \frac{4}{27}\right)^2$

$$x^2 = x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{16}{729} \Rightarrow x = \frac{2}{27}$$

より 2 つの放物線の交点の x 座標は $\frac{2}{27}$ である。



以上から x 軸に囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2/27} x^2 dx + \int_{2/27}^{4/27} \left(x - \frac{4}{27}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{3} [x^3]_0^{2/27} + \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{4}{27}\right)^3 \right]_{2/27}^{4/27} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{27}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{27}\right)^3 \\
&= \frac{2^4}{3^{10}}
\end{aligned}$$