

2012 年度センター試験 数学 2B

第 3 問

$\{a_n\}$ を $a_2 = -\frac{7}{3}$, $a_5 = -\frac{25}{3}$ である等差数列とし、自然数 n に対して $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく。

$a_1 = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり、 $\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{エオ}}$ である。したがって

$$a_n = \boxed{\text{カキ}} n + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$S_n = \boxed{\text{コ}} n^2 + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。

次に、数列 $\{b_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^n b_k = \frac{4}{3} b_n + S_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① から、 $b_1 = \boxed{\text{ス}}$ である。

さらに $\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k + b_n$ に注意して、① を利用すると

$$b_{n+1} = \boxed{\text{セ}} b_n + \boxed{\text{ソ}} n + \boxed{\text{タ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立ち、この等式は

$$b_{n+1} + \boxed{\text{チ}} (n+1) + \boxed{\text{ツ}} = \boxed{\text{セ}} (b_n + \boxed{\text{チ}} n + \boxed{\text{ツ}}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と変形できる。ここで

$$c_n = b_n + \boxed{\text{チ}} n + \boxed{\text{ツ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくと、 $\{c_n\}$ は $c_1 = \boxed{\text{テ}}$ 、公比が $\boxed{\text{ト}}$ の等比数列であるから ② により

$$b_n = \boxed{\text{ナ}}^{\boxed{\text{ニ}}} - \boxed{\text{ヌ}} n - \boxed{\text{ネ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。ただし、 $\boxed{二}$ については、当てはまるものを、次の ①～④ のうちから一つ選べ

- ① $n - 2$ ② $n - 1$ ③ n ④ $n + 1$ ⑤ $n + 2$
-

公差を d とすると

$$\begin{cases} a_1 + d = -\frac{7}{3} \\ a_1 + 4d = -\frac{25}{3} \end{cases}$$

これより $a_1 = -\frac{1}{3}$ であり、公差は $d = -2$ となる。したがって

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = -\frac{1}{3} - 2(n - 1) = -2n + \frac{5}{3}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(-2k + \frac{5}{3} \right) = -2 \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{5}{3} \times n = -n^2 + \frac{2}{3}n$$

数列 $\{b_n\}$ の条件式 ① に $n = 1$ を代入すると、左辺は b_1 となることから

$$b_1 = \frac{4}{3}b_1 + S_1 = \frac{4}{3}b_1 - \frac{1}{3} \Rightarrow b_1 = 1$$

さらに

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n b_k + b_{n+1} \\ \Rightarrow \frac{4}{3}b_{n+1} + S_{n+1} &= \frac{4}{3}b_n + S_n + b_{n+1} \\ \Rightarrow b_{n+1} &= 4b_n + 3(S_n - S_{n+1}) \\ &= 4b_n + 6n + 1 \end{aligned}$$

いま $b_{n+1} + s(n+1) + t = 4(b_n + sn + t)$ とおき s, t を求めると

$$b_{n+1} = 4b_n + 3sn - s + 3t$$

より $3s = 6, -s + 3t = 1 \Rightarrow s = 2, t = 1$. よって

$$b_{n+1} + 2(n+1) + 1 = 4(b_n + 2n + 1)$$

ここで $c_n = b_n + 2n + 1$ とおくと、数列 $\{c_n\}$ は

$$c_1 = b_1 + 2 \times 1 + 1 = 4$$

公比 **4** の等比数列である。このことから

$$\begin{aligned} c_n &= 4 \times 4^{n-1} = 4^n \\ b_n &= c_n - 2n - 1 = 4^n - 2n - 1 \end{aligned}$$

問題の 二 には ② n が当てはまる。