

2012 年度センター試験 数学 2B

第 4 問

空間に異なる 4 点 O, A, B, C を $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$ となるようにとり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。さらに、3 点 D, E, F を $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \vec{c}$ となるようにとり、線分 BD の中点を L 、線分 CE の中点を M とし、線分 AD を $3:1$ に内分する点を N とする。

- (1) $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}} \vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{ON} = \vec{a} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \vec{b}$$

と表される。

- (2) 2 直線 FL , MN が交わることを確かめよう。 $0 < s < 1$ とし、線分 FL を $s:(1-s)$ に内分する点を P とする。 $\overrightarrow{OP}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} - \frac{s}{\boxed{\text{カ}}} \right) \vec{a} + s \vec{b} + \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} - s \right) \vec{c}$$

と表される。 $s = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のとき、 $\overrightarrow{MP} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \overrightarrow{MN}$ となるので、 M, N, P は一直線上にある。よって 2 直線 FL, MN は交わることが分かる。

- (3) 2 直線 FL , MN の交点を G とする。 $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{GF}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \left(\boxed{\text{ス}} \vec{a} + \boxed{\text{セ}} \vec{b} + \vec{c} \right)$$

$$\overrightarrow{GF} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \left(\vec{a} - \boxed{\text{セ}} \vec{b} + \boxed{\text{ソ}} \vec{c} \right)$$

と表される。

$|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ とする。このとき、 $|\overrightarrow{GF}| = \boxed{\text{タ}}$, $|\overrightarrow{GM}| = 2$ となる。

次に、直線 OC 上に点 H をとり、実数 t を用いて、 $\overrightarrow{OH} = t\vec{c}$ と表す。

$\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GH}$ は t を用いて

$$\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GH} = \boxed{\text{チ}} t + \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GH} = 2t + \frac{10}{3} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

と表される。

さらに $\angle FGH = \angle MGH$ とする。このときの t の値を求めよう。

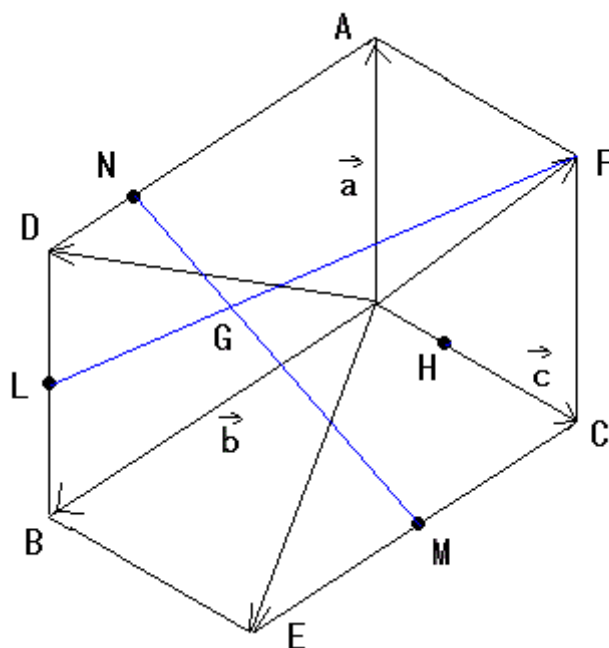
$|\overrightarrow{GF}| = \boxed{\text{タ}}$, $|\overrightarrow{GM}| = 2$ と $\angle FGH = \angle MGH$ であることから

$$\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GH} = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GH} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。①, ②, ③ から $t = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

(1)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} \\ \overrightarrow{ON} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \end{aligned}$$



(2) $0 < s < 1$ とし、線分 FL を $s:(1-s)$ に内分する点を P とする。

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

となることから $\overrightarrow{OP}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-s)\overrightarrow{OF} + s\overrightarrow{OL} \\ &= (1-s)(\vec{a} + \vec{c}) + s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \left(1 - \frac{s}{2}\right)\vec{a} + s\vec{b} + (1-s)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c} \\ \overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \left(1 - \frac{s}{2}\right)\vec{a} + \left(s - \frac{1}{2}\right)\vec{b} - s\vec{c}\end{aligned}$$

ここで

$$1:\frac{1}{4} = \left(1 - \frac{s}{2}\right) : \left(s - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow s - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{s}{8} \Rightarrow s = \frac{2}{3}$$

このとき $\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MN}$ となるため、 M, N, P は一直線上にあることが分かり、 FL, MN は交わることが分かる

(3) FL, MN の交点を G とする。 $\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{GF}$ は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \vec{c} \\ &= \frac{1}{3} (2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) \\ \overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OG} \\ &= \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{3} (2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{3} (\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})\end{aligned}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = \sqrt{3}$ とする。このとき $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ より

$$|\overrightarrow{GF}|^2 = \frac{1}{9} |\vec{a}|^2 + \frac{4}{9} |\vec{b}|^2 + \frac{4}{9} |\vec{c}|^2 = 9$$

よって $|\overrightarrow{GF}| = 3$. 一方

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG} \\ &= \frac{1}{2} \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{3} (2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{2}{3} \vec{a} - \frac{1}{6} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}\end{aligned}$$

となるため、

$$|\overrightarrow{GM}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{36}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{c}|^2 = 4$$

よって $|\overrightarrow{GM}| = 2$

OC 上に点 H をとり、 $\overrightarrow{OH} = t\vec{c}$ と表す。

$$\overrightarrow{GH} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \left(t - \frac{1}{3}\right)\vec{c}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GH} &= -\frac{2}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{3}\right)|\vec{c}|^2 \\ &= 2t + \frac{16}{3} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GH} &= \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{3}\right)|\vec{c}|^2 \\ &= 2t + \frac{10}{3} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表される。

$\angle FGH = \angle MGH$ とすると $|\overrightarrow{GF}| = 3, |\overrightarrow{GM}| = 2$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GH} &= |\overrightarrow{GF}| |\overrightarrow{GH}| \cos \angle FGH \\ &= \frac{3}{2} |\overrightarrow{GM}| |\overrightarrow{GH}| \cos \angle MGH \\ &= \frac{3}{2} \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GH} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。③ に ①, ② を代入すると

$$2t + \frac{16}{3} = \frac{3}{2} \left(2t + \frac{10}{3} \right) \Rightarrow t = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

である。