

2012 年度センター試験 数学 2B

第 5 問

ある高等学校の A クラスには全部で 20 人の生徒がいる。次の表は、その 20 人の生徒の国語と英語のテストの結果をまとめたものである。表の横軸は国語の得点を、縦軸は英語の得点を表し、表中の数値は、国語の得点と英語の得点の組み合わせに対応する人数を表している。ただし、得点は 0 以上 10 以下の整数値をとり、空欄は 0 人であることを表している。たとえば、国語の得点が 7 点で英語の得点が 6 点である生徒の人数は 2 である。

英語	(点)	10											
	9												
	8						1		1				
	7					5							
	6				4	1	1	2					
	5					2							
	4				1	1							
	3				1								
	2												
	1												
	0												
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		国語 (点)											

また、次の表は、A クラスの 20 人について、上の表の国語と英語の得点の平均値と分散をまとめたものである。ただし、表の数値はすべて正確な値であり、四捨五入されていない。

	国語	英語
平均値	B	6.0
分散	1.60	C

以下、小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して解答せよ。途中で割り切れた場合、指定された桁まで④にマークすること。

- (1) Aクラスの20人のうち、国語の得点が4点の生徒は ア 人であり、英語の得点が国語の得点以下の生徒は イ 人である。
- (2) Aクラスの20人について、国語の得点の平均値 B は ウ.エ 点であり、英語の得点の分散 C は オ.カキ である。
- (3) Aクラスの20人のうち、国語の得点が平均値 ウ.エ 点と異なり、かつ英語の得点も平均値 6.0 点と異なる生徒は ク 人である。
Aクラスの20人について、国語の得点と英語の得点の相関係数の値は ケ.
コサシ である。

次の表は、Aクラスの20人に他のクラスの40人を加えた60人の生徒について、前の表と同じ国語と英語のテストの結果をまとめたものである。この60人について、国語の得点の平均値も英語の得点の平均値も、それぞれちょうど5.4点である。

英語 (点)	10											
	9											
	8						1		1			
	7					5			2	1		
	6				4	1	8	5	F			
	5				3	5	5	1				
	4			2	2	D	E	2	2			
	3		1		1							
	2											
	1											
	0											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		国語 (点)										

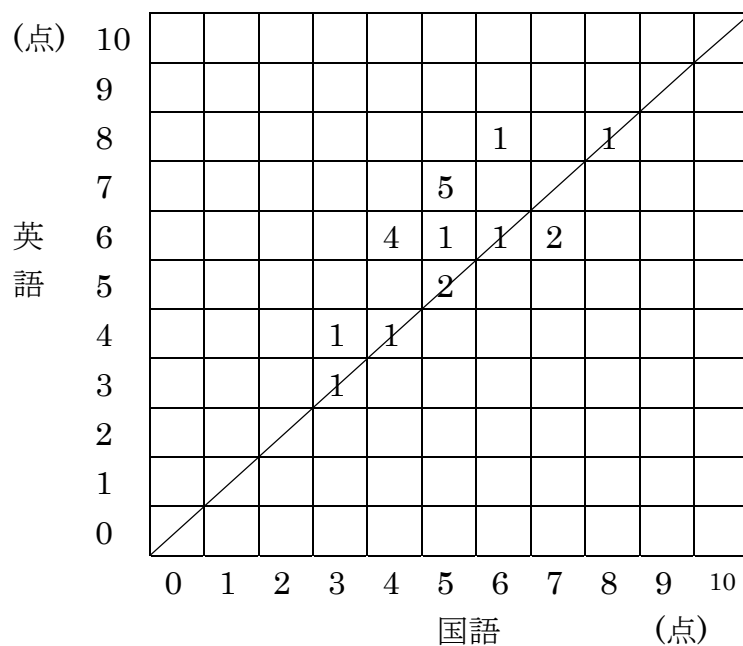
- (4) 上の表の D, E, F を除いた人数は 52 人である。その 52 人について、国語の得点の合計は スセソ 点であり、英語の得点の合計は 288 点である。
したがって、連立方程式

$$\begin{cases} D + E + F = \boxed{\text{タ}} \\ 4D + 5E + 8F = \boxed{\text{チツ}} \\ 4D + 4E + 6F = 36 \end{cases}$$

を解くことによって、 D, E, F の値は、それぞれ $\boxed{\text{テ}}$ 人、 $\boxed{\text{ト}}$ 人、 $\boxed{\text{ナ}}$ 人であることが分かる。

- (5) 60 人から A クラスの 20 人を除いた 40 人について、英語の得点の平均値は $\boxed{\text{ニ}}.\boxed{\text{ヌ}}$ 点であり、中央値は $\boxed{\text{ネ}}.\boxed{\text{ノ}}$ 点である。

- (6) 60 人のうち、国語の得点が x 点である生徒について、英語の得点の平均値 $M(x)$ と英語の得点の中央値 $N(x)$ を考える。ただし、 x は 1 以上 9 以下の整数とする。このとき、 $M(x) \neq N(x)$ となる x は $\boxed{\text{ハ}}$ 個ある。一方、 $M(x) < x$ かつ $N(x) < x$ となる x は $\boxed{\text{ヒ}}$ 個ある。



- (1) 国語が 4 点の生徒の人数は表の 4 点の縦の列の数の合計にあたるため $4 + 1 = 5$ 人。また英語の得点が国語の得点以下であるとき、上の表の対角線上から下のマス目に入る。そのため条件を満たす人数は $1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 8$ 人。

- (2) 表から国語の得点をまとめると以下の通りになる。

点数	3 点	4 点	5 点	6 点	7 点	8 点
人数	2 人	5 人	8 人	2 人	2 人	1 人

このことから国語の得点の合計は

$$3 \times 2 + 4 \times 5 + 5 \times 8 + 6 \times 2 + 7 \times 2 + 8 \times 1 = 100$$

以上から国語の得点の平均値は $100/20 = 5.0$ 点。英語の得点と平均値との差を求めると以下の通りになる。

点数	3 点	4 点	5 点	6 点	7 点	8 点
人数	1 人	2 人	2 人	8 人	5 人	2 人
平均値との差	3	2	1	0	1	2

このことから英語の得点の分散は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{20} (3^2 \times 1 + 2^2 \times 2 + 1^2 \times 2 + 0^2 \times 8 + 1^2 \times 5 + 2^2 \times 2) \\ & = 1.60 \end{aligned}$$

(3) 国語の得点が 5.0 点でなく、かつ英語の得点が 6.0 点ではない生徒は表の太枠以外の箇所に書かれているため、人数は 5 人。

20 人の生徒の国語の得点を $x_1, x_2, \dots, x_{20}$, 英語の得点を $y_1, y_2, \dots, y_{20}$ と表し、各教科の平均を $\bar{x}$, $\bar{y}$ と表すと、2 教科に関する相関係数は以下の式で表すことができる。

$$\frac{\sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{20} (\bar{y} - y_i)^2}}$$

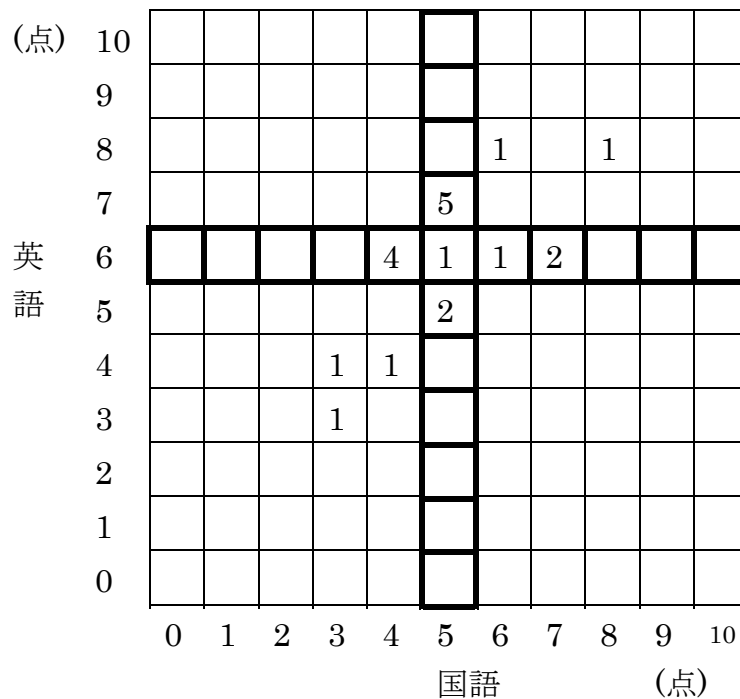
分母の各値は各教科の分散の値に生徒の人数を掛けた値に等しいため、

$$\sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{20} (\bar{y} - y_i)^2 = 1.60 \times 20 = 32$$

よって

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - x_i)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{20} (\bar{y} - y_i)^2} = \sqrt{32} \times \sqrt{32} = 32$$

一方、分子の式 $(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$ はいずれかの教科で平均値に等しい得点である場合 **0** であるため、2 つの教科とも平均値と異なる得点である **5** 人の生徒について値を求めればよい。



5 人の各教科の平均値との差とそれらの積を求めると以下のとおりである。

(国語、英語)	(3, 3)	(3, 4)	(4, 4)	(6, 8)	(8, 8)	計
国語の平均値との差	− 2	− 2	− 1	1	3	
英語の平均値との差	− 3	− 2	− 2	2	2	
2 つの値の積	6	4	2	2	6	2 0

以上から相関係数は

$$\frac{20}{32} = 0.625$$

英語	(点)	10										
		9										
		8						1		1		
		7					5			2	1	
		6				4	1	8	5	F		
		5				3	5	5	1			
		4			2	2	D	E	2	2		
		3		1		1						
		2										
		1										
		0										
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
												国語
												(点)

60 人の生徒に対する国語と英語の得点の表について表の中で D,E,F を除いた生徒の合計は 52 人であるため、

$$D + E + F + 52 = 60 \Rightarrow D + E + F = 8$$

上の 60 人の生徒に対する国語と英語の得点の表について、D,E,F を除いた 52 人の生徒の各教科の点数をまとめると以下の通りになる。

点数	1 点	2 点	3 点	4 点	5 点	6 点	7 点	8 点	9 点
国語(人)	1	2	3	7	1 1	1 6	8	3	1
英語(人)	0	0	2	8	1 4	1 8	8	2	0

以上から 52 人の生徒の国語の点数の合計は

$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 7 + 5 \times 11 + 6 \times 16 + 7 \times 8 + 8 \times 3 + 9 \times 1 = 282$$

よって

$$\begin{aligned}4D + 5E + 8F + 282 &= 5.4 \times 60 = 324 \\ \Rightarrow 4D + 5E + 8F &= 42\end{aligned}$$

また、52 人の生徒の英語の点数の合計は 288 点であるため、

$$\begin{aligned}4D + 4E + 6F + 288 &= 5.4 \times 60 = 324 \\ \Rightarrow 4D + 4E + 6F &= 36\end{aligned}$$

以上より D, E, F について

$$\begin{cases} D + E + F = 8 \\ 4D + 5E + 8F = 42 \\ 4D + 4E + 6F = 36 \end{cases}$$

が成り立つことがわかる。この連立方程式を解くと D, E, F の値がそれぞれ 4 人、2 人、2 人であることが分かる。

(5) 60 人の生徒の英語の得点の合計は $5.4 \times 60 = 324$ 点。このうち A クラスの生徒 20 人の英語の得点の合計は $6.0 \times 20 = 120$ 点。よって A クラス以外の 40 人の英語の得点の合計は 204 点。このことから 40 人の英語の得点の平均点は

$$\frac{204}{40} = 5.1 \text{ 点}$$

2 つの表を比べることで、A クラス以外の 40 人の英語の得点が以下の通りであることが分かる。

英語の 点数	3 点	4 点	5 点	6 点	7 点
人数	1	2	2	2	3

40 人のうち、得点の高い順から 20 番目、21 番目の生徒の得点はともに 5 点であるため、40 人の生徒の英語の得点の中央値は 5.0 点である。

(6) 60 人のうち、国語の得点が x 点である生徒について、英語の得点の分布、平均値 $M(x)$ と英語の得点の中央値 $N(x)$ を求めると以下の通りになる。

英語(人)	3 点	4 点	5 点	6 点	7 点	8 点	$M(x)$	$N(x)$
$x = 1$	1	0	0	0	0	0	3.0	3.0
$x = 2$	0	2	0	0	0	0	4.0	4.0
$x = 3$	1	2	0	0	0	0	3.7	4.0
$x = 4$	0	4	3	2	0	0	4.8	5.0
$x = 5$	0	2	5	1	5	0	5.7	5.0
$x = 6$	0	2	5	8	0	1	5.7	6.0
$x = 7$	0	2	1	5	0	0	5.4	6.0
$x = 8$	0	0	0	2	2	1	6.8	7.0
$x = 9$	0	0	0	0	1	0	7.0	7.0

このとき、 $M(x) \neq N(x)$ となる x は $x = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ の全部で **8** 個ある。一方、 $M(x) < x$ かつ $N(x) < x$ となる x は $x = 7, 8, 9$ の全部で **3** 個ある。