

2012 年度センター試験 数学 2B

第 6 問

与えられた二つの自然数 M と N について、 M から始まる N 個の連続する自然数の積 $M \times (M + 1) \times (M + 2) \times \cdots \times (M + N - 1)$ が 8 で割り切れるかどうかを調べ、その結果を出力する[プログラム 1]を作成した。ただし、 $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。

[プログラム 1]

```
100 INPUT PROMPT "M=" : M
110 INPUT PROMPT "N=" : N
120 
130 FOR I=0 TO 
140     LET X= X *(M+I)
150 NEXT I
160 IF  THEN
170     PRINT "8 で割り切れます"
180     
190 END IF
200 PRINT "8 で割り切れません"
210 END
```

(1) [プログラム 1] の に当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。

- | | | |
|---------------|-----------|-------------|
| ① LET X=0 | ② LET X=1 | ③ LET X=M |
| ④ LET X=M+N-1 | ⑤ LET N=M | ⑥ LET N=M+N |

に当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。

- | | | |
|-------|---------|-------|
| ① M-1 | ② M | ③ N-1 |
| ④ N | ⑤ M+N-1 | ⑥ M+N |

ウ に当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ① $N - \text{INT}(N/8) * 8 < 0$ | ② $N - \text{INT}(N/8) * 8 = 0$ | ③ $N - \text{INT}(N/8) * 8 > 0$ |
| ④ $X - \text{INT}(X/8) * 8 < 0$ | ⑤ $X - \text{INT}(X/8) * 8 = 0$ | ⑥ $X - \text{INT}(X/8) * 8 > 0$ |

エ に当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| ① LET X=X+1 | ② LET M=M+1 | ③ LET X=X/8 |
| ④ GOTO 150 | ⑤ GOTO 200 | ⑥ GOTO 210 |

- (2) [プログラム 1] を実行したとき「8 で割り切れます」と出力されるような変数 M, N の入力について、 $M + N$ の値の最小値は オ である。

また、変数 M にどんな自然数を入力しても、つねに「8 で割り切れます」と出力されるような変数 N への入力がある。このような変数 N への入力のうち、最小の自然数は カ である。

(問題文は次ページに続く)

二つの自然数 M と L が与えられたとき、条件

「 N は L 以下の自然数であり、かつ M から始まる N 個の連続する自然数の積 $M \times (M + 1) \times (M + 2) \times \cdots \times (M + N - 1)$ は 2^N で割り切れるが 2^{N+1} では割り切れない」 …………… (*)

を満たす N の個数を求めたい。そのために [プログラム 1] を変更して、[プログラム 2] を作成した。ただし、120 行から 150 行まで、190 行、210 行は変更していない。

[プログラム 2]

```
100 INPUT PROMPT "M=" : M
110 INPUT PROMPT "L=" : L
112 キ
114 FOR N=1 TO L
120   ア
130   FOR I=0 TO イ
140     LET X= X *(M+I)
150   NEXT I
152   LET K=2^N
160   IF ク THEN
170     LET K=K*2
180     IF ケ THEN
182       コ
184     END IF
190   END IF
200 NEXT N
202 PRINT ""
210 END
```

(3) [プログラム 2] の キ に当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。

① LET C=0

① LET C=M-1

② LET C=L-1

③ LET C=1

④ LET C=M

⑤ LET C=L

ク、ケ に当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つずつ選べ。た

だし、同じものを選んでもよい。

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ① $N - \text{INT}(N/K) * K < 0$ | ① $N - \text{INT}(N/K) * K = 0$ | ② $N - \text{INT}(N/K) * K > 0$ |
| ③ $X - \text{INT}(X/K) * K < 0$ | ④ $X - \text{INT}(X/K) * K = 0$ | ⑤ $X - \text{INT}(X/K) * K > 0$ |

☐ に当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| ① LET X=X+1 | ① LET N=N+1 | ② LET K=K*2 |
| ③ LET C=C+1 | ④ GOTO 200 | ⑤ GOTO 210 |

(4) [プログラム 2] を実行し、変数 M に 4、変数 L に 5 を入力したとき、202 行で出力された変数 C の値は ☐ サ である。

(5) [プログラム 2] において、条件 (*) を満たす N の値をすべて出力するためには、たとえば、☐ シ に

PRINT N

という行を挿入すればよい。☐ に当てはまるものを、次の ①～③ のうちから一つ選べ。

- | | |
|------------------|------------------|
| ① 110 行と 112 行の間 | ① 150 行と 152 行の間 |
| ② 180 行と 182 行の間 | ③ 200 行と 202 行の間 |

(1) [プログラム 1] の 130～150 行で、 $M \times (M + 1) \times \cdots \times (M + N - 1)$ の計算を行っている。計算は始めに $X = 1$ とおき、順に $M, M + 1, \dots, M + N - 1$ を掛けていく。よって ☐ ア には ① の LET X=1、☐ イ には ② の N-1 が入る。

160～190 行で、積の値 X が 8 で割り切れるか判定をする。X は

$$\text{INT}(X/8) * 8 \leq 0 < (\text{INT}(X/8) + 1) * 8$$

を満たす整数である。このため X が 8 で割り切れるとき

- ④ $X - \text{INT}(X/8) * 8 = 0$

が成り立つ。この条件が成り立つとき「8で割り切れます」と表示し、IF文から離れる。よって180行には⑤ GOTO 210 を表示する。

(2) 「8で割り切れます」と表示される最小の例は $2 \times 3 \times 4 = 24$ のときである。このとき $M = 2, N = 3$ より $M + N = 5$

$N = 3$ のとき、 $M = 1$ ならば $X = 1 \times 2 \times 3 = 6$ は8で割り切れない。一方、 $N = 4$ のとき、 $M, M + 1, \dots, M + 3$ の中に4の倍数とそれ以外の2の倍数が含まれるため、積は必ず8の倍数である。よって変数 M にどんな自然数を入力しても、つねに「8で割り切れます」と表示される最小の自然数 N は4である。

[プログラム2]において、 C は (*) の条件を満たす N の個数を表す。そのため C の初期値を決める必要がある。よって112行の [キ] には①の LET C=0 を入れる。

152 ~ 190行で積が 2^n で割り切れ、 2^{n+1} で割り切れないことの判定を行う。プログラム内で積は X で、 $2^n, 2^{n+1}$ は K で表しているため、

積が K で割り切れる。 $\Leftrightarrow X = \text{INT}(X/K) * K$

$$\Leftrightarrow X - \text{INT}(X/K) * K = 0$$

積が K で割り切れない。 $\Leftrightarrow X > \text{INT}(X/K) * K$

$$\Leftrightarrow X - \text{INT}(X/K) * K > 0$$

まず160行で積が 2^n で割り切れるかの判定を行う。そのため、[ク] には④ $X - \text{INT}(X/K) * K = 0$ が入る。180行では積が 2^n で割り切れるときに、さらに積が 2^{n+1} で割り切れるかの判定を行う。積が 2^n で割り切れないときに次の182行の操作を行うため、[ケ] には積が 2^n で割り切れない条件⑤ $X - \text{INT}(X/K) * K > 0$ が入る。

182行には (*) の条件を満たす時の操作を表す。このとき (*) の条件を満たす N の個数 C を一つ増やすため、[コ] には③の LET C=C+1 を入れる。

M に 4、 L に 5 を入力したとき $N = 1, \dots, 5$ の範囲で積 X が $2^n, 2^{n+1}$ のそれぞれで割り切れるかをまとめると以下の通りになる。

N	X	$X - \text{INT}(X/2^N) * 2^N$	$X - \text{INT}(X/2^{N+1}) * 2^{N+1}$
1	4	0	0
2	20	0	$\neq 0$
3	120	0	$\neq 0$
4	840	$\neq 0$	$\neq 0$
5	6720	0	0

この表より条件 (*) を満たす N は $N = 2, 3$ のときのみ。よって出力される値は **2** である。

条件 (*) を満たす N の値をすべて出力するためには (*) の判定を終えて **NEXT N** の操作が行われる前でなければいけない。そのため、**PRINT N** は ② 180 行と 182 行との間に挿入すればよい。