

第 2 問

Figure 1: A tournament tree for 4 teams (A, B, C, D). The first round has two matches: A vs B and C vs D. The winners of these matches advance to the final. The final winner is labeled '優勝' (Champion).

Figure 2: A tournament tree for 4 teams (A, B, C, D). The first round has two matches: A vs B and C vs D. The winners of these matches advance to the final. The final winner is labeled '優勝' (Champion). The runner-up is labeled '準優勝' (Runner-up).

Figure 3: A tournament tree for 2 teams (X, Y). The winner of the match is labeled '勝利チーム' (Winning team).

対戦は括弧で囲むため、記法 1 では図 1 の T1 は「 $((A \times B) \times (C \times D))$ 」、図 2 の T2 は「 $((A \times B) \times C) \times D$ 」となる。

問 2. 記法 1 で使われる文字数を減らす試みとして、X と Y が対戦し、その結果で決まる勝利チームを「(XY*)」と表してみる。この記法を使い、カッコを削除してみる。

$$\lceil (A \times (B \times C)) \rceil \Rightarrow \lceil (A \times (BC^*)) \rceil \Rightarrow \lceil (A(BC^*)^*) \rceil \Rightarrow \lceil ABC^{**} \rceil$$

この記法では左から出現する順に「*」に注目し、対戦チームの対応を付けていくと、記法 1 による元の表現と同じ組み合わせを表していることがわかる。同様に「 $((A \times B) \times C)$ 」の記法を考えると

$$\lceil ((A \times B) \times C) \rceil \Rightarrow \lceil ((AB^*) \times C) \rceil \Rightarrow \lceil ((AB^*)C^*) \rceil \Rightarrow \lceil AB^*C^* \rceil$$

となり、「*」に注目し対戦チームの対応を付けていくと、元の表現と同じ組み合わせを表していることが分かる。この例では決勝戦の対戦チームは中央の「*」の左右にある「AB」と「C*」と表されている。

以上から「(X×Y)」を「(XY*)」と表す記法を記法2とする。この記法は括弧が不要であるため、文字数が減る。たとえば13文字の「((A×B)×(C×D))」は、記法2で表すと

$$「((A \times B) \times (C \times D))」 \Rightarrow 「((AB*) \times (CD*))」 \Rightarrow 「((AB*)(CD*)*)」 \Rightarrow 「AB*CD**」$$

となるため、文字数は7文字である。

問3 記法2において、どのような組み合わせにおいても末尾に「*」が1個以上出現する。末尾の「*」の個数はその直前までの表現が分かれば計算できる。

なぜならば、表現全体で出現する「*」の数は(参加チーム数)−1であるため、末尾の「*」をすべて削除した表現から、「*」の個数が(参加チーム数)−1になるまで「*」を末尾に加えることによって、記法2の表現を再現することができる。末尾の「*」をすべて削除した表現を記法3とする。

例えば「ABC**DE**」は「ABC**DE」となる。また図1の組合せ例T1について記法3で表すと

$$\begin{aligned} 「((A \times B) \times (C \times D))」 &\Rightarrow 「AB*CD**」 \\ &\Rightarrow 「AB*CD」 \end{aligned}$$

となり表記は5文字となる。

逆に表記3で「AB*CD**EF」と表される表現を記法1に変える。まず参加チーム数は6であるため、表記2の表現で「*」の数は6−1=5である。つまり「AB*CD**EF」の末尾に「*」を2個加えた「AB*CD**EF**」が表記2の表現になる。この表現から記法1に変えると

$$\begin{aligned} AB*CD**EF** &\Rightarrow (A \times B)CD**EF** \\ &\Rightarrow (A \times B)(C \times D)*EF** \\ &\Rightarrow ((A \times B) \times (C \times D))EF** \\ &\Rightarrow ((A \times B) \times (C \times D))(E \times F)* \\ &\Rightarrow (((A \times B) \times (C \times D)) \times (E \times F)) \end{aligned}$$

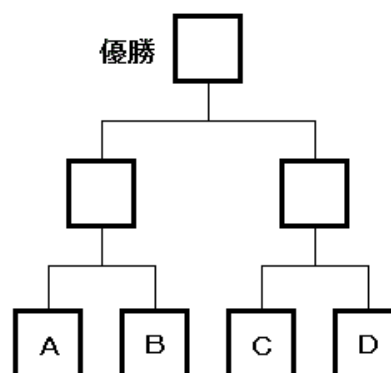


図1 組合せ例T1 (再掲)

となる。

記法3での出場チーム数(nとする)と必要な文字数の関係を考える。たとえば、「 $(A \times (B \times (C \times D)))$ 」というトーナメントを記法3で表すと

$$\begin{aligned}(A \times (B \times (C \times D))) &\Rightarrow (A \times (B \times CD*)) \\ &\Rightarrow (A \times BCD**) \\ &\Rightarrow ABCD*** \\ &\Rightarrow ABCD\end{aligned}$$

となり「*」がすべて削除される。このように1より大きなnに対して「*」が1回も出現しない組合せが存在する。

問4 「XとYの試合」が順序を好感した「YとXの試合」と同じものとなしていくと、記法2の表現において「*」を末尾に多く置くことができる。たとえば、記法2で「 AB^*C^* 」と表現される組合せは「 $(AB^*) \times C$ 」と表される。この試合の順序を交換すると「 $C \times (AB^*)$ 」となり、表記2で表すと「 CAB^{**} 」となり、末尾の「*」の数が増える。これにより記法3での文字数をより減らせることになる。

図2のトーナメントT2で同様の方法を行う。
このトーナメントを記法1で表すと「 $((A \times B) \times C) \times D$ 」となるが、この対戦チームの順序を入れ替えると

「 $(D \times (C \times (A \times B)))$ 」となる。この表現から作られる記法2の表現は

$$(D \times (C \times (A \times B))) \Rightarrow DCAB***$$

である。これにより記法3では「DCAB」となるため、最小で4文字で表現できる。「DCBA」という表現もある)

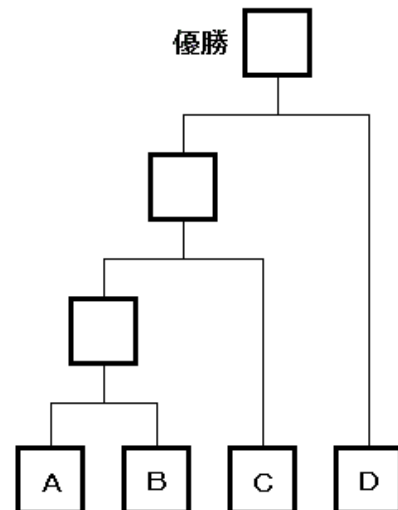


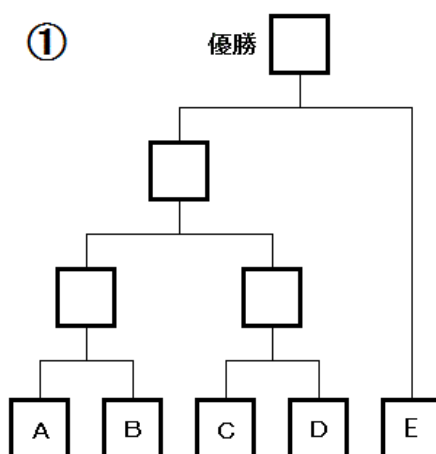
図2 組合せ例T2(再掲)

たとえば「 EAB^*CD 」とメールで送るとき、この表現に対応するトーナメントを求める。チーム数は5であるため記法2で使われる「*」の数は4個。よって「*」をあと3個末尾に加えた「 EAB^*CD*** 」が記法2での表現になる。この表現から記法

1 の表現を再現すると、

$$\begin{aligned} \text{EAB*CD***} &\Rightarrow \text{E(A}\times\text{B)(C}\times\text{D)**} \\ &\Rightarrow \text{E((A}\times\text{B)}\times\text{(C}\times\text{D))}^* \\ &\Rightarrow (\text{E}\times\text{((A}\times\text{B)}\times\text{(C}\times\text{D))))} \\ &\Rightarrow (((\text{A}\times\text{B)}\times\text{(C}\times\text{D)})\times\text{E}) \end{aligned}$$

となる。この組み合わせは①の組合せと同じである。



問 2 の解答

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
4	1	6	5	7	2	7	5	2	3	4	1

(オ・カの解答は入れ替えても正解)