

## 2012 年度センター試験 工業数理基礎

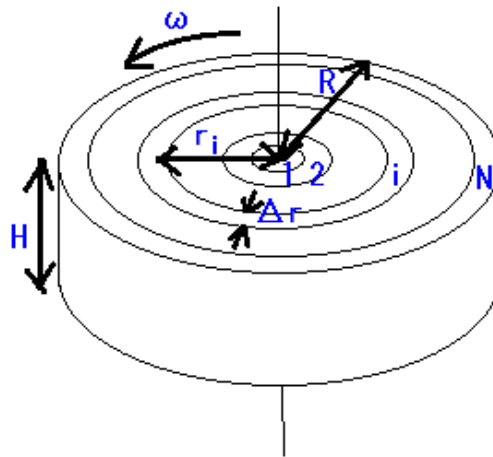
### 第 1 問

問 1 回転する円盤に蓄えられるエネルギーについて考える。円盤は以下の状態のものを扱う。

半径 :  $R$  [m]      厚さ :  $H$  [m]  
密度 :  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>]      角速度 :  $\omega$  [rad/S]

また円盤の回転による空気抵抗や摩擦は無視できるものとする。

円盤を  $N$  個の同じ幅  $\Delta r$  [m] の薄いリングに分割し、その  $i$  番目に着目する。リングの中心から中心軸までの距離を  $r_i$  とする。



角速度は半径 1 m の円盤が 1 秒で  $\omega$  m 進むため、半径  $r_i$  のリングの周速度  $v_i$  は  $\boxed{r_i\omega}$  m (選択肢の 0) 進む。

このリングの体積  $V_i$  は、半径が  $r_i + \frac{\Delta r}{2}$  の円盤と半径が  $r_i - \frac{\Delta r}{2}$  の円盤の体積の差に等しいので、

$$V_i = \pi H \left( r_i + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \pi H \left( r_i - \frac{\Delta r}{2} \right)^2$$

となる。式 (1) を整理すると

$$V_i = 2\pi H r_i \Delta r$$

よって、密度  $\rho$  を用いると、リングの質量  $m_i$  [kg] は

$$m_i = \rho V_i = \boxed{2\pi H r_i \Delta r} \quad (\text{選択肢の 7})$$

となる。

以上から  $i$  番目のリングの運動エネルギー  $E_i$  [J] は

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi \rho H r_i \Delta r \times (r_i \omega)^2 \\ &= \boxed{\pi \rho \omega^2 H} \times r_i^3 \times \Delta r \end{aligned}$$

(四角の式は選択肢の 9) となる。

$N$  個のリングについて  $E_i$  の和を求め  $N \rightarrow \infty$  すなわち  $\Delta r \rightarrow 0$  の極限をとると、円盤の運動エネルギー  $E$  は次のように定積分に置き換えて求めることができる。

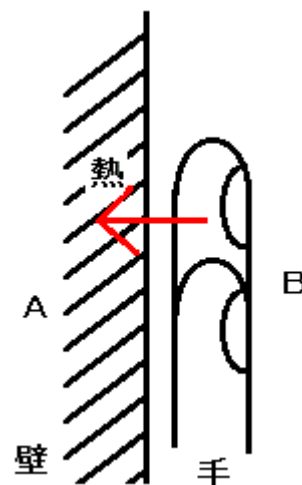
$$\begin{aligned} E &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N E_i = \frac{\pi \rho \omega^2 H}{2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{\pi \rho \omega^2 H}{2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{\pi \rho \omega^2 H}{2} \times \frac{R^4}{4} \end{aligned}$$

問 1 解答

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| ア | イ | ウ | エ | オ |
| 0 | 7 | 9 | 3 | 4 |

問2 壁と手が接した際の接触面の温度の違いについて考える。壁と手をそれぞれ均質な物体 A, B とし、それらに関する各種の物質量を添え字 a, b で表すこととする。また、熱の流れは壁面に垂直な方向のみに生じるものとする。

接触をする前の物体 A, B の温度をそれぞれ一様な  $T_a [^{\circ}\text{C}]$ ,  $T_b [^{\circ}\text{C}]$  ( $T_a < T_b$ ) とし、接触した後の両者の接触面の温度を  $T_i [^{\circ}\text{C}]$  ( $T_a < T_i < T_b$ ) とする。物体 A, B が接触してから経過した時間を  $t [\text{s}]$  とし、接触した直後では、 $T_i$  は一定とみなせるとする。



単位時間あたりに単位面積を通過する熱量を熱流束という。物体 A, B の接触面における熱流束については、相対的に温度が高い物体 B から流出するものとする。その熱流束  $Q_b [\text{W}/\text{m}^2]$  は以下の式 (3) で与えられる。

$$Q_b = \frac{H_b}{\sqrt{t}} \times (T_b - T_i) \quad (3)$$

ここで、 $H_b [\text{J}/(\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C} \cdot \text{s}^{0.5})]$  は物体 B の熱的な性質を表す係数である。これから  $Q_b$  の値は  $t$  が短いほど大きく、例えば  $t = 0.01 \text{ s}$  のとき  $\sqrt{t} = 0.1$ 、 $t = 0.5 \text{ s}$  のとき  $\sqrt{t} = 0.1 \times \sqrt{50}$  であるため、 $Q_b$  の値は  $t = 0.01 \text{ s}$  では  $t = 0.5 \text{ s}$  の  $\sqrt{50} = \text{約 } 7$  倍であることが分かる。

一方熱流束を、相対的に温度の低い物体 A に流入すると考えると、 $T_i > T_a$  より、その熱流束は物体 A の熱的な性質を表す係数  $H_a [\text{J}/(\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C} \cdot \text{s}^{0.5})]$  を用いて

$$Q_a = \frac{H_a}{\sqrt{t}} \times (T_i - T_a) \quad (4)$$

(四角の式は選択肢の 3 番) で与えられる。

物体 A, B の接触面における熱の流れについて、物体 B から流出した熱がすべて物体 A に流入したとすると、 $Q_a = Q_b$  が成り立つ。式 (3), (4) から接触面の温度  $T_i$  を与える式 (5) が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{H_a}{\sqrt{t}} \times (T_i - T_a) &= \frac{H_b}{\sqrt{t}} \times (T_b - T_i) \\ \Rightarrow H_a T_i - H_a T_a &= H_b T_b - H_b T_i \\ \Rightarrow T_i &= \frac{H_a T_a + H_b T_b}{H_a + H_b} \quad (5)\end{aligned}$$

(四角の式は選択肢の 6 番)

式 (5) と以下の表 1 で与えられる数値を使って、木製の壁または金属製の壁を手で触った時の接触面の温度の違いを求める。

表 1 温度計算に用いる  $H$  の値

| 木製の壁 | 金属製の壁 | 人の手 |
|------|-------|-----|
| 240  | サシスセ  | 960 |

手で触る前の壁の温度を  $15^{\circ}\text{C}$ 、手の温度を  $34^{\circ}\text{C}$  とすると、木製の壁に触った時の接触面の温度は式 (5) を使うと

$$\begin{aligned}T_i &= \frac{240 \times 15 + 960 \times 34}{240 + 960} \\ &= \frac{36240}{1200} \\ &= 30.2\end{aligned}$$

となるため、接触面の温度は約  $30^{\circ}\text{C}$  である。

一方、金属製の壁に触った時、接触面の温度は  $15^{\circ}\text{C}$  となる。このことから金属製の壁に対する  $H_a$  を求めると

$$\begin{aligned}17 &= \frac{H_a \times 15 + 960 \times 34}{H_a + 960} \\ \Rightarrow H_a \times 17 + 960 \times 17 &= H_a \times 15 + 960 \times 34 \\ \Rightarrow H_a &= 8160\end{aligned}$$

となる。有効数字 2 桁では 8200 である。問 2 の解答は以下の通り。

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シ | ス | セ |
| 7 | 3 | 6 | 3 | 0 | 8 | 2 | 0 | 0 |