

## 2012 年度センター試験 工業数理基礎

### 第3問

工場で部品を管理する際、補充と保管の費用を抑えるために部品の保管間隔を求める。

問1 A社はある製品を製造している。この製品1個につき1個使われる部品があり、この部品はB社から一定の日数ごとに搬入される。製品と部品の管理についての費用は以下の通りである。

1日の製品の製造個数	$a$ 個
部品の1回の運送の費用	$c$ 円
部品1個の1日当たりの保管費用	$h$ 円

部品の搬入間隔を  $x$  日と置いて、1日当たりの運送費用と管理費用の和の関係を調べる。

部品が一度補充されると  $x$  日後まで部品の補充が行われない。この間も製造を行うため、一度の補充で必要な部品の個数は  $ax$  個である。また1日当たりに均等にした運送費用は次の式で与えられる。

$$S = \frac{c}{x} \quad (1)$$

保管費用は搬入後の日数によって変化する。部品が搬入された日の保管数は  $ax$  個。この後1日ごとに保管数が  $a$  個ずつ減り、 $x$  日目には  $a$  個になる。このことから1日ごとの保管費用は以下の通りになる。

搬入後1日目	$ax \times h$ 円
2日目	$(ax - a) \times h$ 円
3日目	$(ax - 2a) \times h$ 円
.....	.....
$x$ 日目	$a \times h$ 円

よって  $x$  日間の保管費用は

$$\{ax + a(x-1) + \dots + a\}h = ah \times \frac{x(x+1)}{2}$$

この値を  $x$  で割ることにより 1 日当たりの保管費用は

$$\frac{1}{x} \times ah \times \frac{x(x+1)}{2} = \frac{ah(x+1)}{2}$$

(選択肢の 2) となる。

以上から部品の 1 日当たりの総費用  $f(x)$  は、1 日当たりの運送費用と保管費用の和となり、

$$f(x) = \frac{c}{x} + \frac{ah(x+1)}{2} \quad (2)$$

となる。

問 2 式 (2) の  $x$  は正の整数であるが、 $x$  を正の実数と仮定して、総費用の最小値を求める。総費用  $f(x)$  の最小値を求めるために、 $f(x)$  の導関数を求める。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d} \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \frac{c}{x+d} + \frac{ah(x+d+1)}{2} - \frac{c}{x} - \frac{ah(x+1)}{2} \right\} \times \frac{1}{d} \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \frac{-c}{(x+d)x} + \frac{ah}{2} \right\} \end{aligned}$$

この結果から  $f(x)$  の導関数は式 (3) のように表される。

$$f'(x) = -\frac{c}{x^2} + \frac{ah}{2} \quad (3)$$

式 (3) から  $x > 0$  の範囲で  $f(x)$  の増減を考えると

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{c}{x^2} = \frac{ah}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2c}{ah}}$$

$x$  がこの値のとき

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{\frac{2c}{ah}}\right) &= c \times \sqrt{\frac{ah}{2c}} + \frac{ah}{2} \times \left(\sqrt{\frac{2c}{ah}} + 1\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{ach} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{ach} + \frac{ah}{2} \\ &= \sqrt{2ach} + \frac{ah}{2} \end{aligned}$$

以上から  $f(x)$  の増減表は以下のように表される。

$x$	...	$\sqrt{\frac{2c}{ah}}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	減少	$\sqrt{2ach} + \frac{ah}{2}$	増加

(順に選択肢の **2, 4**) このことから総費用を最小にする補充期間は  $\sqrt{2c/ah}$  に近い整数である。

### 問3

これまでの計算を踏まえて実際に値を置いた場合を考える。

1日の製品の製造個数  $a = 200$  個  
部品の1回の運送の費用  $c = 20000$  円  
部品1個の1日当たりの保管費用  $h = 15$  円

これらの値の場合に総費用を最小にする日数を考える。

$x$  を正の実数とすると総費用  $f(x)$  が最小になる  $x$  は

$$\sqrt{\frac{2 \times 20000}{200 \times 15}} = \sqrt{\frac{200}{15}} \sim 3.7$$

となる。つまり総費用が最小になる補充間隔は約 3.7 日である。 $x = 3.7$  に近い整数で総費用を求める。

$$f(x) = \frac{20000}{x} + 1500(x + 1)$$

より

$$f(3) = \frac{20000}{3} + 1500 \times (3 + 1) \sim 12667$$

$$f(4) = \frac{20000}{4} + 1500 \times (4 + 1) = 12500$$

以上から補充間隔と総費用を表にまとめると以下の通りになる。

補充間隔 (日)	1	2	3	4	5	6
総費用 (円)	23000	14500	<b>12667</b>	<b>12500</b>	13000	13833

(選択肢の **7, 6**) この表から総費用を最小にする補充間隔は **4** 日であることが分かる。

#### 第 3 問の解答

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
2	1	2	4	7	6	4