

2013 年度センター試験 数学 1

第 1 問

[1] $A = \frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$, $B = \frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ とする。

このとき

$$AB = \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2 - \boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{6} - \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり、また

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{6}$$

である。以上により

$$A + B = \frac{\boxed{\text{カ}} - \sqrt{6}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

AB を計算する

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{3}} \times \frac{1}{1+\sqrt{6}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2 - \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2 - 3} \\ &= \frac{1}{2(2+\sqrt{6})} \end{aligned}$$

$$= \frac{2-\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-2}{4}$$

次に $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ を計算する。

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = (1 + \sqrt{3} + \sqrt{6}) + (1 - \sqrt{3} + \sqrt{6}) = 2 + 2\sqrt{6}$$

ここで

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{A+B}{AB}$$

より

$$A+B = \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) \times AB = (2 + 2\sqrt{6}) \times \frac{\sqrt{6}-2}{4} = \frac{4-\sqrt{6}}{2}$$

[2] x を変数とし、二つの不等式

$$|2x + 13| \geq 3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$x^2 - 2ax + 2a^2 + 10a + 15 \leq 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

を考える。

下の $\boxed{\text{タ}}$ には、次の ①～③ のうちからあてはまるものを一つ選べ。

$$\textcircled{1} > \quad \textcircled{1} < \quad \textcircled{2} \geq \quad \textcircled{3} \leq$$

不等式 (1) の解は

$$x \leq \boxed{\text{クケ}}, \quad \boxed{\text{コサ}} \leq x$$

であり、これと次の 2 次不等式

$$x^2 + \boxed{\text{シス}} x + \boxed{\text{セソ}} \boxed{\text{タ}} 0$$

の解は一致する。

次に、不等式 (2) を満たす実数 x が存在するような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{チツ}} - \sqrt{\boxed{\text{テト}}} \leq a \leq \boxed{\text{チツ}} + \sqrt{\boxed{\text{テト}}}$$

であり、この範囲にある最小の整数は $\boxed{\text{ナニ}}$ である。

$a = \boxed{\text{ナニ}}$ のとき、二つの不等式 (1) と (2) をともに満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\text{ヌネ}} \leq a \leq \boxed{\text{ノハ}}$$

である。

(1) を解くと

$$2x + 13 \leq -3, \quad 3 \leq 2x + 13$$

$$x \leq -8, \quad -5 \leq x$$

この範囲と一致する 2 次不等式は

$$(x + 8)(x + 5) \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 13x + 40 \geq 0$$

$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまる不等号は ② $\geq$ である。

(2) を満たす実数 x が存在するとき、左辺の判別式は 0 以上になる。したがって

$$(-2a)^2 - 4(2a^2 + 10a + 15) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 10a + 15 \leq 0$$

$$\Rightarrow -5 - \sqrt{10} \leq 0 \leq -5 + \sqrt{10}$$

$-5 - \sqrt{10} \doteq -8.16$ より、この範囲の最小の整数は -8 である。

$a = -8$ のとき、不等式 (2) を解くと

$$\begin{aligned} x^2 + 16x + 63 &\leq 0 \\ \Rightarrow (x + 9)(x + 7) &\leq 0 \\ \Rightarrow -9 \leq x &\leq -7 \end{aligned}$$

よって、(1) と (2) をともに満たす x の値の範囲は

$$-9 \leq x \leq -8$$

である。