

2013 年度センター試験 数学 1

第 2 問

座標平面上にある点 P は、点 $A(-8, 8)$ から出発して、直線 $y = -x$ 上を x 座標が 1 秒あたり 2 増加するように一定の速さで動く。また、同じ座標平面上にある点 Q は、点 P が A を出発すると同時に原点 O から出発して、直線 $y = 10x$ 上を x 座標が 1 秒あたり 1 増加するように一定の速さで動く。出発してから t 秒後の 2 点 P, Q を考える。点 P が O に到達するのは $t = \boxed{\text{ア}}$ のときである。以下、 $0 < t < \boxed{\text{ア}}$ で考える。

(1) 点 P と x 座標が等しい x 軸上の点を P' 、点 Q と x 座標が等しい x 軸上の点を Q' とおく。三角形 OPP' と三角形 OQQ' の面積の和 S を t で表せば

$$S = \boxed{\text{イ}} t^2 - \boxed{\text{ウエ}} t + \boxed{\text{オカ}}$$

となる。これより $0 < t < \boxed{\text{ア}}$ においては、 $t = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で S は最小値 $\frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ をとる。

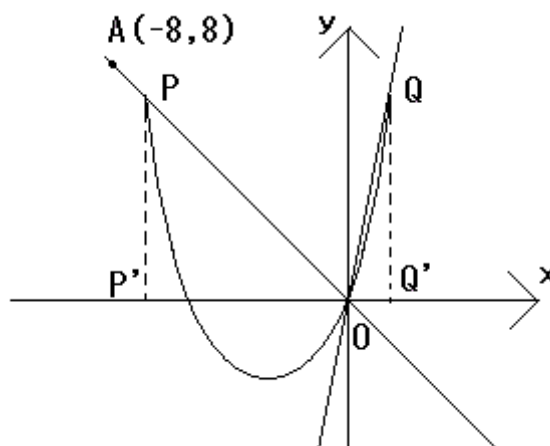
次に、 a を $0 < a < \boxed{\text{ア}} - 1$ を満たす定数とする。以下、 $a \leq t \leq a + 1$ における S の最小・最大について考える。

(i) S が $t = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で最小となるような a の値の範囲は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \leq a \leq \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(ii) S が $t = a$ で最大となるような a の値の範囲は $0 < a \leq \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(2) 3 点 O, P, Q を通る 2 次関数のグラフが関数 $y = 2x^2$ のグラフを平行移

動したものになるのは、 $t = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のときであり、 x 軸方向に $\frac{\boxed{\text{ニ又}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ 、 y 軸方向に $\frac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ だけ平行移動すればよい。



t 秒後の点 P の座標は $(-8 + 2t, 8 - 2t)$ 、点 Q の座標は $(t, 10t)$ 。点 P が点 O と一致するのは $-8 + 2t = 0 \Rightarrow t = 4$ のときである。以下 $0 < t < 4$ で考える。

(1) 点 P' の座標は $(-8 + 2t, 0)$ であるため、三角形 OPP' の面積は

$$\frac{1}{2} \times (8 - 2t) \times (8 - 2t) = 2t^2 - 16t + 32$$

また点 Q' の座標は $(t, 0)$ であるため、三角形 OQQ' の面積は

$$\frac{1}{2} \times t \times 10t = 5t^2$$

よって三角形 OPP' と三角形 OQQ' の面積の和 S は

$$S = (2t^2 - 16t + 32) + 5t^2 = 7t^2 - 16t + 32$$

となる。 S を変形すると

$$S = 7\left(t - \frac{8}{7}\right)^2 + \frac{160}{7}$$

となるため、 S の増減は以下の通りになる。

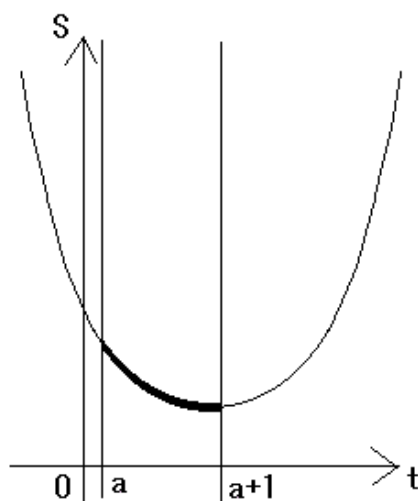
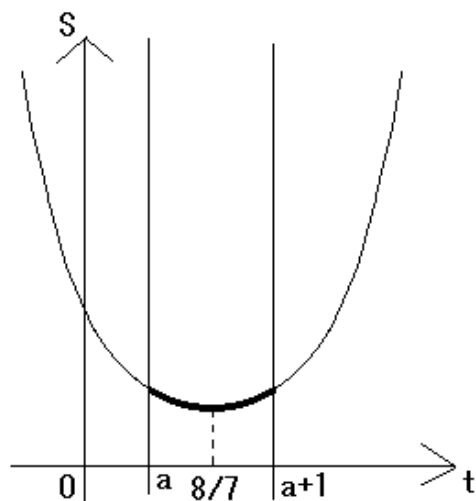
t	0		$\frac{8}{7}$		4
S	32	減少	$\frac{160}{7}$	増加	112

したがって $0 < t < 4$ において、 $t = \frac{8}{7}$ で S は最小値 $\frac{160}{7}$ をとる。

a を $0 < a < 3$ を満たす定数とする。以下、 $a \leq t \leq a+1$ における S の最小・最大について考える。

(i) S が $t = \frac{8}{7}$ で最小となるためには、 $a \leq \frac{8}{7} \leq a+1$ を満たさなければならない。このことから

$$a \leq \frac{8}{7} \text{ かつ } a+1 \geq \frac{8}{7} \Rightarrow \frac{1}{7} \leq a \leq \frac{8}{7}$$



(ii) S が $t = a$ で最大となるときは

$$(t = a \text{ のときの } S \text{ の値}) \geq (t = a+1 \text{ のときの } S \text{ の値})$$

が成り立たなければならない。このとき

$$7a^2 - 16a + 32 \geq 7(a+1)^2 - 16(a+1) + 32$$

$$\Rightarrow a \leq \frac{9}{14}$$

となるため、条件を満たす a の範囲は $0 < a \leq \frac{9}{14}$

(2) 2次関数 $y = 2x^2$ のグラフを平行移動したグラフは $y = 2x^2 + ax + b$ (a, b : 実数) という方程式で表すことができる。このグラフが O, P, Q を通るとき

$$\begin{cases} 0 &= 2 \times 0^2 + a \times 0 + b \\ 8 - 2t &= 2(-8 + 2t)^2 + a(-8 + 2t) + b \\ 10t &= 2t^2 + at + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = \frac{5}{2}, \quad a = 5, \quad b = 0$$

このとき 2次関数は

$$y = 2x^2 + 5x = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

となり、 $y = 2x^2$ のグラフを

$$x \text{ 軸方向に } \frac{-5}{4}, y \text{ 軸方向に } \frac{-25}{8}$$

だけ平行移動すればよい。