

2013 年度センター試験 数学 1

第 3 問

三角形 ABC において $AB = 6$, $BC = 2\sqrt{7}$, $CA = 4$ とする。 $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D 、 $\angle A$ の二等分線と三角形 ABC の外接円との点 A と異なる交点を E とする。辺 AC の延長と 2 点 B, E を通る直線の交点を F とする。

(1) $\cos \angle ABC = \frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また、 $\cos \angle BAC = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であるから、 $\angle BAC = \boxed{\text{カキ}}^\circ$ である。

(2) 点 E から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を H とすると、 $\angle ECH = \boxed{\text{クケ}}^\circ$, $\angle EBH = \boxed{\text{コサ}}^\circ$ であるから、 $HC = \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。した

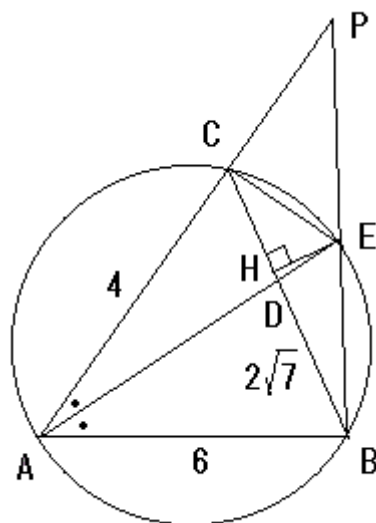
がって $CE = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(3) 三角形 ABP において

$$\angle APB = 180^\circ - \angle BAP - (\angle CBP + \angle ABC) = \boxed{\text{チツ}}^\circ - \angle ABC$$

である。したがって $\sin \angle APB = \frac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

(4) 三角形 ECP において、 $\sin \angle CEP = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ であるから $CP = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。



(1) 余弦定理より

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB \cdot BC} = \frac{36 + 28 - 16}{2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 AB \cdot AC} = \frac{36 + 16 - 28}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

であるから $\angle BAC = 60^\circ$ である。

(2) 円周角の定理から

$$\angle ECH = \angle ECB = \angle EAB = \frac{1}{2} \times \angle CAB = 30^\circ$$

$$\angle EBH = \angle EBC = \angle EAC = \frac{1}{2} \times \angle BAC = 30^\circ$$

であることから三角形 EBC は $EB = EC$ の二等辺三角形。つまり点 H は辺

BC の中点である。したがって $HC = \frac{1}{2} \times BC = \sqrt{7}$ 。

$$\begin{aligned}
 \sin \angle ECH = \frac{HC}{CE} &\Rightarrow CE = HC \times \frac{1}{\sin \angle ECH} \\
 &= \sqrt{7} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{2\sqrt{21}}{3}
 \end{aligned}$$

(3) 三角形 ABP において

$$\begin{aligned}
 \angle APB &= 180^\circ - \angle BAP - (\angle CBP + \angle ABC) \\
 &= 180^\circ - (\angle BAP + \angle CBP) - \angle ABC \\
 &= 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) - \angle ABC \\
 &= 90^\circ - \angle ABC
 \end{aligned}$$

である。したがって

$$\sin \angle APB = \cos \angle ABC = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

である。

(4) 三角形 ECP において

$$\angle CEP = 180^\circ - \angle BEC = \angle BAC - 60^\circ$$

であるため、 $\sin \angle CEP = \sqrt{3}/2$

正弦定理より

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin \angle CEP}{CP} &= \frac{\sin \angle APB}{CE} \\
 \Rightarrow CP &= CE \times \frac{\sin \angle CEP}{\sin \angle APB} \\
 &= \frac{2\sqrt{21}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7}{2\sqrt{7}} \\
 &= \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

である。