2013 年度センター試験　数学 1

第 4 問

a, b は $a > 0, b \leqq 0$ である定数とし、t の２次方程

$$t^2 + 4a\,t + b = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。方程式 ① を $(t + \boxed{\text{ア}}\ a)^2 = \boxed{\text{イ}}\ a^2 - b$ と書き直す。
$b \leqq 0$ であるから、方程式 ① の実数解は

$$t = \boxed{\text{ウエ}}\ a \pm \sqrt{\boxed{\text{オ}}\, a^2 - b}$$

である。

方程式 ① と同じ a, b に対して、x の方程式

$$(x-2)^2 + 4\,a\,|x-2| + b = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。

(1) $b = 0$ の場合、方程式 ① の解は $t = \boxed{\text{カ}}$ ，$\boxed{\text{キク}}\ a$ である。このとき、方程式 ② の実数解の個数は $\boxed{\text{ケ}}$ 個である。

(2) $b < 0$ の場合、方程式 ① の 0 以上である実数解は

$$t = \boxed{\text{ウエ}}\ a \pm \sqrt{\boxed{\text{オ}}\, a^2 - b}$$

である。このとき、方程式 ② の実数解の個数は $\boxed{\text{コ}}$ 個である。

方程式 ① を書き直すと

$$t^2 + 4a\,t + 4\,a^2 = 4\,a^2 - b$$

$$\Rightarrow \qquad (t + \mathbf{2}\,a)^2 = \mathbf{4}\,a^2 - b$$

となる。$b \leqq 0$ であることから $4\,a^2 - b \geqq 0$ したがって、① の実数解は

$$t + 2\,a = \pm\sqrt{4\,a^2 - b}$$

$$\Rightarrow \qquad t = -\mathbf{2}\,a \pm \sqrt{\mathbf{4}\,a^2 - b}$$

である。

(1) $b=0$ の場合、方程式 ① は $t^2+4\,at=0 \Rightarrow t\,(t+4a)=0$ となるため、解は $t=0,-4\,a$ である。また方程式 ② は

$$(x-2)^2+4\,a\,|x-2|=0$$

となる。

$x \geqq 2$ のときは

$$\begin{aligned}&(x-2)^2+4\,a\,(x-2)=0\\ \Rightarrow\quad &(x-2+4a)(x-2)=0\\ \Rightarrow\quad &x=2,\quad 2-4\,a\end{aligned}$$

$2-4\,a<2$ より $x=2-4\,a$ は不適

$x<2$ のときは

$$\begin{aligned}&(x-2)^2-4\,a\,(x-2)=0\\ \Rightarrow\quad &x=2,\quad 2+4\,a\end{aligned}$$

$2+4a>2$ より $x=2,\ 2+4a$ はともに不適。
以上より、方程式 ② の実数解の個数は $x=2$ の 1 個である。

(2) $b<0$ の場合、方程式 ① の 0 以上の解は

$$t=-2\,a+\sqrt{4\,a^2-b}$$

である。

$x \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}&(x-2)^2+4\,a\,(x-2)+b=0\\ \Rightarrow\quad &x-2=-2\,a\pm\sqrt{4\,a^2-b}\end{aligned}$$

である。$x \geqq 2 \Rightarrow x-2 \geqq 0$ より

$$x-2=-2\,a+\sqrt{4\,a^2-b}$$

$$\Rightarrow\quad x=2-2\,a+\sqrt{4\,a^2-b}$$

$x<2$ のとき

$$\begin{aligned}&(x-2)^2-4\,a\,(x-2)+b=0\\ \Rightarrow\quad &x-2=2\,a\pm\sqrt{4\,a^2-b}\end{aligned}$$

である。$x<2 \Rightarrow x-2<0$ より

$$x-2=2\,a-\sqrt{4\,a^2-b}$$

$$\Rightarrow \qquad x=2+2\,a-\sqrt{4\,a^2-b}$$

以上から方程式 ② の実数解の個数は

$$x=2-2\,a+\sqrt{4\,a^2-b},2+2\,a-\sqrt{4\,a^2-b}$$

の **2** 個である。