

2013 年度センター試験 数学 1A

第 1 問

[1] $A = \frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$, $B = \frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ とする。

このとき

$$AB = \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2 - \boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{6} - \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり、また

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{6}$$

である。以上により

$$A + B = \frac{\boxed{\text{カ}} - \sqrt{6}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

AB を計算する

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{3}} \times \frac{1}{1+\sqrt{6}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2 - \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2 - 3} \\ &= \frac{1}{2(2+\sqrt{6})} \end{aligned}$$

$$= \frac{2-\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-2}{4}$$

次に $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ を計算する。

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = (1 + \sqrt{3} + \sqrt{6}) + (1 - \sqrt{3} + \sqrt{6}) = 2 + 2\sqrt{6}$$

ここで

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{A+B}{AB}$$

より

$$A+B = \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) \times AB = (2 + 2\sqrt{6}) \times \frac{\sqrt{6}-2}{4} = \frac{4-\sqrt{6}}{2}$$

[2] 三角形に関する条件 p, q, r を次のように定める。

p : 三つの内角がすべて異なる

q : 直角三角形でない

r : の内角は一つもない

条件 p の否定を $\bar{p}$ で表し、同様に $\bar{q}, \bar{r}$ はそれぞれ条件 q, r の否定を表すものとする。

(1) 命題「 $r \Rightarrow (p \text{ または } q)$ 」の対偶は「 $\boxed{\text{ク}} \Rightarrow \bar{r}$ 」である。 $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを、次の ①～③ のうちから一つ選べ。

① (p かつ q)

① ($\bar{p}$ かつ $\bar{q}$)

② ($\bar{p}$ または q)

③ ($\bar{p}$ または $\bar{q}$)

(2) 次の ①～④ のうち、命題「 $(p \text{ または } q) \Rightarrow r$ 」に対する反例となっている三角形は $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを、①～④ のうちから一つずつ選べ。ただし、 $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ の解答の順序は問わない。

① 直角二等辺三角形

① 内角が $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ の三角形

② 正三角形

③ 三辺の長さが $3, 4, 5$ の三角形

④ 頂角が 45° の二等辺三角形

(3) r は $(p \text{ または } q)$ であるための $\boxed{\text{サ}}$ 。

$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを、次の ①～③ のうちから一つ選べ。

① 必要十分条件である

① 必要条件であるが、十分条件でない

② 十分条件であるが、必要条件でない

③ 必要条件でも十分条件でもない。

(1) 命題「 $r \Rightarrow (p \text{ または } q)$ 」の対偶は

「 $(p \text{ または } q) \text{ の否定} \Rightarrow \bar{r}$ 」

つまり

$$「(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}」$$

となり ク に当てはまるものは ① $(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q})$ である。

(2) 命題「 $(p \text{ または } q) \Rightarrow r$ 」に対する反例となるためには条件 $(p \text{ または } q)$ を満たし、条件 r を満たさないものでなければならない。選択肢の各三角形について調べる。

① 直角二等辺三角形

二つの内角が等しく、かつ直角三角形であるため $(p \text{ または } q)$ の条件を満たさない。つまりこの三角形は反例とはならない。

① 内角が $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ の三角形

三つの内角がすべて異なり、かつ鈍角三角形であるため $(p \text{ または } q)$ の条件は満たす。しかし 45° の内角を持つため条件 r を満たさない。つまりこの三角形は反例となる。

② 正三角形

直角三角形でないため $(p \text{ または } q)$ の条件は満たす。さらに 45° の内角を持たないため r の条件は満たす。つまりこの三角形は反例とならない。

③ 三辺の長さが $3, 4, 5$ の三角形

直角三角形であるものの二等辺三角形でないため $(p \text{ または } q)$ の条件は満たす。さらに直角二等辺三角形でないため 45° の内角を持たず r の条件も満たす。つまりこの三角形は反例とならない。

④ 頂角が 45° の二等辺三角形

残りの2つの頂点の角度は $(180^\circ - 45^\circ) \div 2 = 67.5^\circ$ であるため、直角三角形でない。したがって $(p \text{ または } q)$ の条件を満たす。しかし 45° の内角を持つため r の条件は満たさない。つまりこの三角形は反例となる。

以上から命題 の反例となる三角形は ① と ④ である。

(3) 命題「 $r \Rightarrow (p \text{ または } q)$ 」については、その対偶である

$$「(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}」$$

について調べればよい。

$\bar{p} \Rightarrow$ 少なくとも2つの内角が等しい $\Rightarrow$ 二等辺三角形である。

$\bar{q} \Rightarrow$ 直角三角形である。

したがって

$(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q}) \Rightarrow$ 直角二等辺三角形である。
 $\Rightarrow$ 3つの内角が $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ である。
 $\Rightarrow 45^\circ$ の内角を持つ。
 $\Rightarrow \bar{r}$

以上から「 $(\bar{p} \text{ かつ } \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}$ 」が真であるため、その対偶である「 $r \Rightarrow (p \text{ または } q)$ 」も真である。つまり r は $(p \text{ または } q)$ であるための十分条件である。

一方「 $(p \text{ または } q) \Rightarrow r$ 」は (2) で反例が挙げられているため、偽である。つまり r は $(p \text{ または } q)$ であるための必要条件ではない。

よって r は $(p \text{ または } q)$ であるための ② 十分条件であるが、必要条件でない。