2013年度センター試験　数学1A

第3問

点 O を中心とする半径 3 の円 O と、点 O を通り、点 P を中心とする半径1の円 P を考える。円 P の点 O における接線と円 O との交点を A, B とする。また、円 O の周上に、点 B と異なる点 C を、弦 AC が円 P に接するようにとる。弦 AC と円 P の接点を D とする。このとき

$$AP = \sqrt{\boxed{\text{アイ}}},\qquad OD = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。さらに $\cos\angle OAD = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり、$AC = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ であり、三角形 ABC の内接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(1) 円 O の周上に、点 E を線分 CE が円 O の直径になるようにとる。三角形 ABC の内接円の中心を Q とし、三角形 CEA の内接円の中心を R とする。このとき $OR = \dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。したがって、内接円 Q と内接円 R は $\boxed{\text{ニ}}$。

$\boxed{\text{二}}$ に当てはまるものを次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

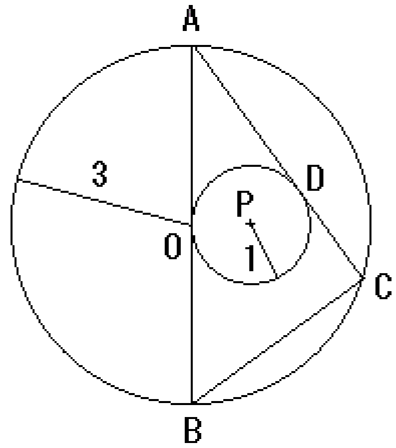
⓪　内接する　　　①　異なる2点で交わる

②　外接する　　　③　共有点を持たない

(2) $AQ = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ であるから、$PQ = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヒフ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ となる。したがって $\boxed{\text{ホ}}$。

$\boxed{\text{二}}$ に当てはまるものを次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

⓪　点 P は内接円 Q の周上にある
①　点 Q は円 P の周上にある
②　点 P は内接円 Q の内部にあり、点 Q は円 P の内部にある
③　点 P は内接円 Q の内部にあり、点 Q は円 P の外部にある

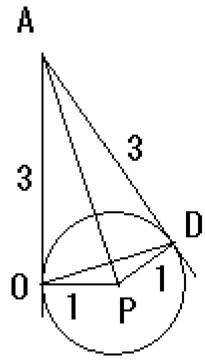


三角形 AOP について線分 AB は円 P の接線であるため $\angle AOP = 90°$
つまり三角形 AOP は直角三角形である。$AO = 3,\ OP = 1$ より

$$AP = \sqrt{\mathrm{AO}^2 + OP^2} = \sqrt{\mathbf{10}}$$

三角形 ADP と三角形 AOP について

$$AO = AD,\ \angle AOP = \angle ADP,\ AP = AP$$



より三角形 ADP と三角形 AOP は合同である。このことから $\angle DAP = \angle OAP$ つまり線分 AP は $\angle DOA$ の二等分線であることが分かる。
さらに三角形 AOD は $AO = AD$ の二等辺三角形であるため、線分 AP は辺 OD の垂直二等分線である。

このことから四角形 $AOPD$ の面積は $\dfrac{1}{2} \times AP \times OD$ で求めることができる。三角形 AOP の面積は $\dfrac{1}{2} \times 3 \times 2 = \dfrac{3}{2}$ より四角形 $AOPD$ の面積は 3
よって。

$$\frac{1}{2} \times AP \times OD = \frac{\sqrt{10}}{2} OD = 3 \ \Rightarrow\ OD = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{\mathbf{3\sqrt{10}}}{\mathbf{5}}$$

三角形 AOD に余弦定理を使うと

$$OD^2 = AO^2 + AD^2 - 2 \times AO \times AD \times \cos\angle OAD$$
$$\frac{18}{5} = 9 + 9 - 18\cos\angle OAD$$
$$\Rightarrow \cos\angle OAD = \mathbf{\frac{4}{5}}$$

よって

$$\sin\angle OAD = \sqrt{1-\cos^2\angle OAD} = \frac{3}{5}$$

AB は円 O の直径であるため、$\angle ACB = 90°$ したがって

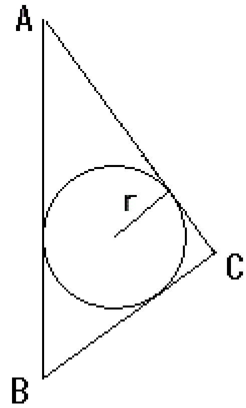
$$\cos\angle OAD = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = 6 \times \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{24}{5}}$$

またこのことから

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \frac{18}{5}$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin\angle BAC = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{24}{5} \times \frac{3}{5}$$
$$= \mathbf{\frac{216}{25}}$$



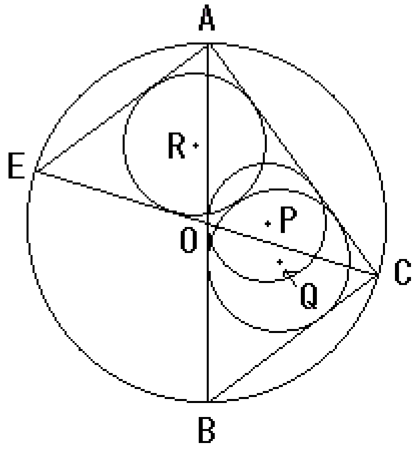
三角形 ABC の内接円の半径を r とする。三角形 ABC の面積は

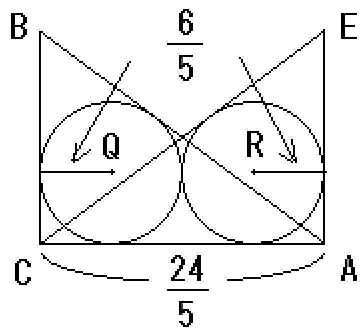
$\frac{1}{2}(AB + BC + CA) \times r$ と表すことができるため

$$\frac{1}{2}\left(6 + \frac{24}{5} + \frac{18}{5}\right) \times r = \frac{216}{25}$$
$$\Rightarrow r = \frac{216}{25} \times \frac{5}{36} = \mathbf{\frac{6}{5}}$$

となる。

(1)





三角形 ACE と三角形 CAB について

$$AC = CA, \qquad \angle EAC = \angle BCA = 90°, \qquad CE = AB$$

より２つは合同な直角三角形である。よって円 R の半径は円 Q の半径と同じ $\dfrac{6}{5}$ である。$CA = \dfrac{24}{5}$ より

$$QR = \frac{24}{5} - 2 \times \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$$

つまり

$$QR = (Q \text{ の半径}) + (R \text{ の半径})$$

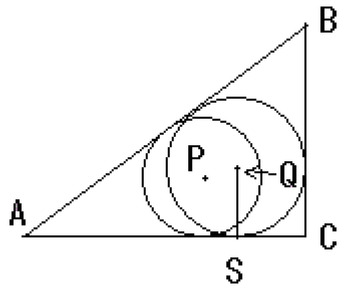
となるため、円 R と円 Q は ② 外接する。

(2)円 Q と線分 AC との接点を S とする。

$$AS = AC - CS = \frac{24}{5} - \frac{6}{5} = \frac{18}{5}, \qquad QS = \frac{6}{5}$$

より

$$AQ = \sqrt{AS^2 + QS^2} = \mathbf{\frac{6\sqrt{10}}{5}}$$



２点 P, Q は共に $\angle BAC$ の二等分線上にあるため、点 A は線分 PQ 上にある。したがって

$$PQ = AQ - AP = \frac{6\sqrt{10}}{5} - \sqrt{10} = \mathbf{\frac{\sqrt{10}}{5}}$$

円 P と円 Q の半径はそれぞれ $1, \dfrac{6}{5}$ である。これらの半径は $PQ = \sqrt{10}/5$ より大きいため ② 点 P は内接円 Q の内部にあり、点 Q は内接円 P の内部にある。