

2013 年度センター試験 数学 2

第 1 問

[1] O を原点とする座標平面上に 2 点 $A(6, 0)$, $B(3, 3)$ をとり、線分 AB を $2:1$ に内分する点を P 、 $1:2$ に外分する点を Q とする。3 点 O, P, Q を通る円を C とする。

(1) P の座標は ($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$) であり、 Q の座標は ($\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エオ}}$) である。

(2) 円 C の方程式を次のように求めてみよう。線分 OP の中点を通り、 OP に垂直な直線の方程式は

$$y = \boxed{\text{カキ}}x + \boxed{\text{ク}}$$

であり、線分 PQ の中点を通り、 PQ に垂直な直線の方程式は

$$y = x - \boxed{\text{ケ}}$$

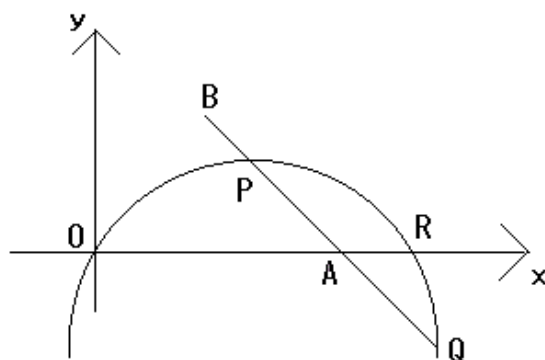
である。

これらの 2 直線の交点が円 C の中心であることから、円 C の方程式は

$$(x - \boxed{\text{コ}})^2 + (y - \boxed{\text{サ}})^2 = \boxed{\text{シス}}$$

であることがわかる。

(3) 円 C と x 軸の二つの交点のうち、点 O と異なる交点を R とすると、 R は線分 OA を $\boxed{\text{セ}}$:1 に外分する。



(1) P の座標は

$$\frac{1}{3}(6, 0) + \frac{2}{3}(3, 3) = (4, 2)$$

Q の座標は

$$\frac{2}{1}(6, 0) + \frac{-1}{1}(3, 3) = (9, -3)$$

(2) 線分 OP の中点を通り、 OP に垂直な直線の方程式は

$$x^2 + y^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 \Rightarrow y = -2x + 5$$

線分 PQ の中点を通り、 PQ に垂直な直線の方程式は

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = (x - 9)^2 + (y + 3)^2 \Rightarrow y = x - 7$$

円 C の中心はこれら 2 直線の交点である。交点の x 座標を求めると

$$-2x + 5 = x - 7 \Rightarrow x = 4$$

これより $y = -3$ となるため、円 C の中心の座標は $(4, -3)$ 。円 C の半径は円周上の点 O と中心との距離 $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ である。したがって円 C の方程式は

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

である。

(3) 円 C と x 軸との交点の x 座標を求めると

$$\begin{aligned} x(x - 4)^2 + (0 + 3)^2 &= 25 \Rightarrow (x - 4)^2 = 16 \\ &\Rightarrow x = 4 \pm 4 = 0, 8 \end{aligned}$$

となる。このことから交点は O と点 $R(8, 0)$ である。 $OR = 8$, $AR = 2$ より点 R は線分 OA を $4:1$ に外分する。

[2] 連立方程式

$$(*) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2^x + 2^y + 2^z = \frac{35}{2} \\ \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} = \frac{49}{16} \end{cases}$$

を満たす実数 x, y, z を求めよう。ただし $x \leq y \leq z$ とする。

$X = 2^x, Y = 2^y, Z = 2^z$ とおくと、 $x \leq y \leq z$ により $X \leq Y \leq Z$ である。 $(*)$ から X, Y, Z の関係式

$$\begin{cases} XYZ = \boxed{\text{ソ}} \\ X + Y + Z = \frac{35}{2} \\ XY + YZ + ZX = \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \end{cases}$$

が得られる。

この関係式を利用すると、 t の 3 次式 $(t - X)(t - Y)(t - Z)$ は

$$\begin{aligned} & (t - X)(t - Y)(t - Z) \\ &= t^3 - (X + Y + Z)t^2 + (XY + YZ + ZX)t - XYZ \\ &= t^3 - \frac{35}{2}t^2 + \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}t - \boxed{\text{ソ}} \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \boxed{\text{テ}}\right)\left(t - \boxed{\text{トナ}}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $X \leq Y \leq Z$ により

$$X = \frac{1}{2}, \quad Y = \boxed{\text{テ}}, \quad Z = \boxed{\text{トナ}}$$

となり $x = \log_{\Xi} X, y = \log_{\Xi} Y, z = \log_{\Xi} Z$ から、

$$x = \boxed{\text{ヌネ}}, \quad y = \boxed{\text{ノ}}, \quad z = \boxed{\text{ハ}}$$

であることがわかる。

$X = 2^x, Y = 2^y, Z = 2^z$ とおくと、

$$XYZ = 2^x \cdot 2^y \cdot 2^z = 2^{x+y+z} = 2^3 = \mathbf{8}$$

$$X + Y + Z = 2^x + 2^y + 2^z = \frac{35}{2}$$

である。また、

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = \frac{XY + YZ + ZX}{XYZ} = \frac{XY + YZ + ZX}{8}$$

より

$$XY + YZ + ZX = \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}\right) \times 8 = \frac{49}{16} \times 8 = \frac{\mathbf{49}}{2}$$

以上から t の 3 次式 $(t - X)(t - Y)(t - Z)$ は

$$\begin{aligned}(t - X)(t - Y)(t - Z) &= t^3 - \frac{35}{2}t^2 + \frac{49}{2}t - 8 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)(t - \mathbf{1})(t - \mathbf{16})\end{aligned}$$

となる。 $X \leq Y \leq Z$ により

$$X = \frac{1}{2}, \quad Y = \mathbf{1}, \quad Z = \mathbf{16}$$

となり $x = \log_2 X, y = \log_2 Y, z = \log_2 Z$ から、

$$x = \log_2 \frac{1}{2} = -\mathbf{1}, \quad y = \log_2 1 = \mathbf{0}, \quad z = \log_2 16 = \mathbf{4}$$

であることがわかる。