2013 年度センター試験　数学 2

第 3 問

a を $0 < a < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin(x - 2a) + \sin(x - a) + \sin x + \sin(x + a) + \sin(x + 2a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とする。

(1) 加法定理を用いると

$$f(x) = (\boxed{ア} + \boxed{イ}\cos a + \boxed{ウ}\cos 2a)\sin x$$

となる。さらに２倍角の公式を用いると

$$f(x) = (\boxed{エオ} + \boxed{カ}\cos a + \boxed{キ}\cos^2 a)\sin x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。

(2) すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つ場合を考える。このとき a の値を求めよう。

まず、② により、すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つのは

$$\boxed{エオ} + \boxed{カ}\cos a + \boxed{キ}\cos^2 a = 0$$

のときである。よって $0 < a < \frac{\pi}{2}$ から

$$\cos a = \frac{\boxed{クケ} + \sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$$

であるので、すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ が成り立つような a がただ一つ定まることがわかる。

次に、すべての実数 x に対して $f(x) = 0$ であるから、特に、$x = \frac{a}{2}$ のと

き $f\left(\frac{a}{2}\right)=0$ である。これにより、① から $\sin\left(\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}a\right)=0$ が分かる。した

がって $0<a<\frac{\pi}{2}$ に注意すると $a=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\pi$ である。

(3) a のときの $\cos\frac{a}{2}$ の値を求めよう。まず、a のとき ③ が成り立つから

$$\cos 2a=-\frac{\boxed{タ}+\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$$

であることがわかる。したがって $\cos\frac{a}{2}=-\cos\left(\pi-\frac{a}{2}\right)$ を利用すると

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{\boxed{テ}+\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$$

である。

---

(1) 加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(x-2a)&=\sin x\cos 2a-\cos x\sin 2a\\ \sin(x-a)&=\sin x\cos a-\cos x\sin a\\ \sin(x+a)&=\sin x\cos a+\cos x\sin a\\ \sin(x+2a)&=\sin x\cos 2a+\cos x\sin 2a\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}f(x)&=2\sin x\cos 2a+2\sin x\cos a+\sin x\\ &=(\mathbf{1}+\mathbf{2}\cos a+\mathbf{2}\cos 2a)\sin x\end{aligned}$$

さらに２倍角の公式

$$\cos 2a=2\cos^2 a-1$$

を使うと

$$\begin{aligned}f(x)&=\{1+2\cos a+2(2\cos^2 a-1)\}\sin x\\ &=(-\mathbf{1}+\mathbf{2}\cos a+\mathbf{4}\cos^2 a)\sin x\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{aligned}$$

(2) すべての x で $f(x)=0$ となる a を求める。② により、すべてのx で $f(x)=0$ となるのは

$$-1+2\cos a+4\cos^2 a=0$$

のときである。このとき

$$\cos a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$0<a<\pi/2$ より、$0<\cos a<1$ したがって

$$\cos a=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

この条件を満たす a はただ一つ存在する。

$x=a/2$ のとき $f(a/2)=0$ である。

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\sin\left(-\frac{3}{2}a\right)+\sin\left(-\frac{1}{2}a\right)+\sin\left(\frac{1}{2}a\right)+\sin\left(\frac{3}{2}a\right)+\sin\left(\frac{5}{2}a\right)$$
$$=\sin\left(\frac{5}{2}a\right)$$

より $\sin(5a/2)=0$

$0<a<\pi/2$ より $0<5a/2<5\pi/4$ となるため、

$$\frac{5}{2}a=\pi \Rightarrow a=\boldsymbol{\frac{2}{5}}\pi$$

(3) のとき ③ が成り立つことから

$$\cos 2a=2\cos^2 a-1$$
$$=2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1$$
$$=-\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

したがって

$$\cos\frac{a}{2}=-\cos\left(\pi-\frac{a}{2}\right)$$
$$=-\cos\frac{4}{5}\pi$$

$$= -\cos 2a$$
$$= \frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{4}}$$