

## 2013 年度センター試験 数学 2

### 第 4 問

$p, q$  を実数として、 $x$  の 3 次式  $f(x)$  を

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 30$$

とする。

(1)  $f(x)$  の  $x$  に虚数  $3 + i$  を代入すると

$$f(3 + i) = \boxed{\text{ア}}p + \boxed{\text{イ}}q + 48 + (\boxed{\text{ウ}}p + q + \boxed{\text{エオ}})i$$

となる。

(2) 3 次方程式  $f(x) = 0$  の一つの解が  $3 + i$  であるとき、他の解を求めよう。  
 $3 + i$  が方程式  $f(x) = 0$  の解であるから

$$\boxed{\text{ア}}p + \boxed{\text{イ}}q + 48 = 0, \quad \boxed{\text{ウ}}p + q + \boxed{\text{エオ}} = 0$$

となり、 $p, q$  の値は

$$p = \boxed{\text{カ}}, q = -\boxed{\text{キ}}$$

である。このとき、 $f(x)$  を因数分解すると

$$f(x) = (x + \boxed{\text{ク}})(x^2 - \boxed{\text{ケ}}x + \boxed{\text{コサ}})$$

となり、方程式  $f(x) = 0$  の他の解は

$$\boxed{\text{シス}}, \quad \boxed{\text{セ}} - i$$

である。

(3) 3 次方程式  $f(x) = 0$  が実数解  $-5$  と二つの虚数解  $\alpha, \beta$  をもつとする。  
このとき、 $\alpha^2 + \beta^2$  を  $p$  を用いて表し、 $\alpha^2 + \beta^2$  のとり得る値の範囲を求めよう。

$-5$  が方程式  $f(x) = 0$  の解であることから

$$q = 5p - \boxed{\text{ソタ}}$$

が成り立つ。したがって、 $f(x)$  は  $p$  を用いて

$$f(x) = (x + 5)\{x^2 + (p - \boxed{\text{チ}})x + \boxed{\text{ツ}}\}$$

と表される。このとき、方程式

$$x^2 + (p - \boxed{\text{チ}})x + \boxed{\text{ツ}} = 0$$

が虚数解  $\alpha, \beta$  をもつような  $p$  のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{テ}} - \boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}} < p < \boxed{\text{テ}} + \boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

解と係数の関係により、 $\alpha^2 + \beta^2$  は  $p$  を用いて

$$\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - \boxed{\text{ニヌ}}p + \boxed{\text{ネノ}}$$

と表される。

したがって、① と ② により、 $\alpha^2 + \beta^2$  のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ハヒフ}} \leq \alpha^2 + \beta^2 < \boxed{\text{ヘホ}}$$

である。

---

(1)

$$\begin{aligned}(3+i)^2 &= 9 + 6i - 1 = 8 + 6i \\ (3+i)^3 &= (3+i)(8+6i) \\ &= 18 + 26i\end{aligned}$$

より、 $f(x)$  の  $x$  に  $3+i$  を代入すると

$$\begin{aligned}f(3+i) &= (18 + 26i) + p(8 + 6i) + q(3 + i) + 30 \\ &= \mathbf{8p + 3q + 48 + (6p + q + 26)i}\end{aligned}$$

(2)  $f(x)$  の一つの解が  $3+i$  であるとき

$$\begin{cases} 8p + 3q + 48 = 0 \\ 6p + q + 26 = 0 \end{cases}$$

となり、 $p, q$  の値は

$$p = \mathbf{-3}, \quad q = \mathbf{-8}$$

このとき  $f(x)$  を因数分解すると

$$\begin{aligned}x^3 - 3x^2 - 8x + 30 \\ = (x + \mathbf{3})(x^2 - \mathbf{6}x + \mathbf{10})\end{aligned}$$

となり、方程式  $f(x) = 0$  の他の解は

$$x = \mathbf{-3}, \quad \mathbf{3 - i}$$

である。

(3)  $f(x) = 0$  が実数解  $-5$  と二つの虚数解  $\alpha, \beta$  をもつとき

$$\begin{aligned} f(-5) &= -125 + 25p - 5q + 30 \\ &= 25p - 5q - 95 \end{aligned}$$

より

$$25p - 5q - 95 = 0 \Rightarrow q = 5p - 19$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + px^2 + (5p - 19)x + 30 \\ &= (x + 5)\{x^2 + (p - 5)x + 6\} \end{aligned}$$

と表される。方程式

$$x^2 + (p - 5)x + 6 = 0$$

が虚数解をもつとき

$$(p - 5)^2 - 4 \times 6 = p^2 - 10p + 1 < 0$$

$$\Rightarrow 5 - 2\sqrt{6} < p < 5 + 2\sqrt{6} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

解と係数の関係から

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (p - 5)^2 - 2 \times 6 \\ &= p^2 - 10p + 13 \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① の範囲における ② の増減をみると

|                      |                 |    |     |    |                 |
|----------------------|-----------------|----|-----|----|-----------------|
| $p$                  | $5 - 2\sqrt{6}$ |    | 5   |    | $5 + 2\sqrt{6}$ |
| $\alpha^2 + \beta^2$ | 12              | 減少 | -12 | 増加 | 12              |

よって  $\alpha^2 + \beta^2$  のとり得る値の範囲は

$$-12 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 12$$

である。