

2013 年度センター試験 数学 2 B

第 2 問

a を正の実数として、 x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3$$

とする。

関数 $y = f(x)$ は、 $x = \text{アイ}$ で極大値 $\text{ウ} a^{\text{エ}}$ をとり、 $x = \text{オ}$ で極小値 $\text{カ} a^{\text{キ}}$ をとる。このとき、2 点

$$(\text{アイ}, \text{ウ} a^{\text{エ}}), (\text{オ}, \text{カ} a^{\text{キ}})$$

と原点を通る放物線

$$y = \text{ク} x^2 - \text{ケ} a^{\text{コ}} x$$

を C とする。原点における C の接線 l の方程式は

$$y = \text{サシ} a^{\text{ス}} x$$

である。また、原点を通り l に垂直な直線 m の方程式は

$$y = \frac{1}{\text{セ} a^{\text{ソ}}} x$$

である。

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線

$$y = -\text{ク} x^2 + \text{ケ} a^{\text{コ}} x$$

を D とする。 D と l で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \frac{\text{タチ}}{\text{ツ}} a^{\text{テ}}$$

である。

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は、 0 と $\frac{4a^{\boxed{4}}+1}{2a^{\boxed{2}}}$ である。 C と m

で囲まれた図形の面積を T とする。 $S=T$ となるのは $a^{\boxed{7}}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$ のときであ

り、このとき、 $S=\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$ である。

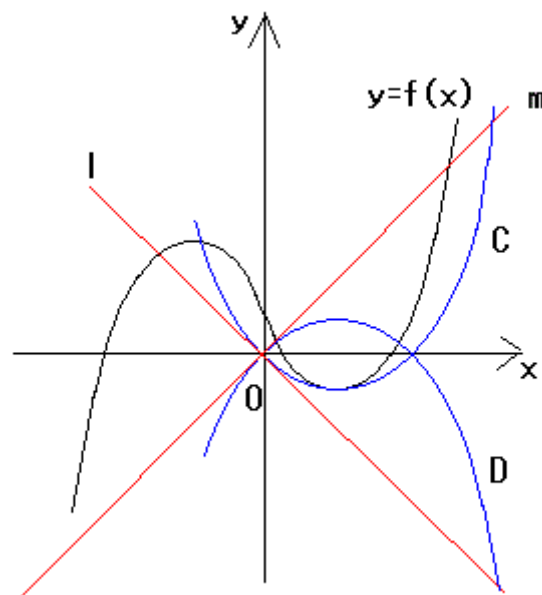
関数 $y=f(x)$ について

$$y' = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

より $y=f(x)$ の増減表は以下の通りになる。

x		$-a$		a	
y'	+	0	-	0	+
y	増加		減少		増加

このことから $y=f(x)$ は $x=-a$ で極大値 $3a^3$ 、 $x=a$ で極小値 $-a^3$ をとる。



2点 $(-a, 3a^3)$ 、 $(a, -a^3)$ と原点を通る放物線を考える。

$$y = a_1x^2 + a_2x + a_3$$

と置くと3点を通ることから

$$\begin{cases} 0 &= a_1 \times 0^2 + a_2 \times 0 + a_3 \\ 3a^3 &= a_1 \times (-a)^2 + a_2 \times (-a) + a_3 \\ -a^3 &= a_1 \times a^2 + a_2 \times a + a_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = a, \quad a_2 = -2a^2, \quad a_3 = 0$$

よって求める放物線の式は

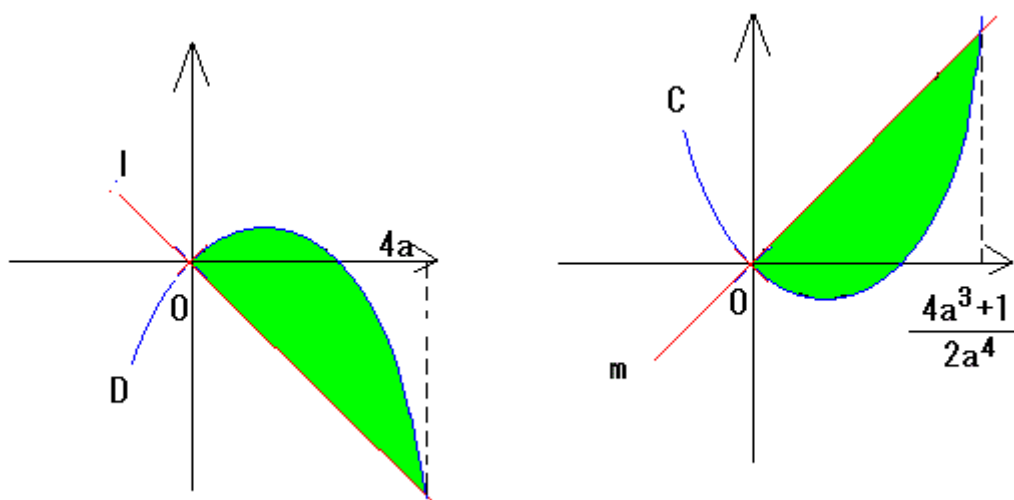
$$y = ax^2 - 2a^2x$$

である。

この式について $y' = 2ax - 2a^2$ となるため、原点における放物線 C の接線の傾きは $-2a^2$ である。よって接線 l の式は $y = -2a^2x$ である。

また、原点を通り C に垂直な直線 m の式は

$$y = \frac{1}{2a^2}x$$



x 軸に対して C と対称な放物線

$$y = -ax^2 + 2a^2x$$

を D とする。 D と l の交点の x 座標を求めると

$$-2a^2x = -ax^2 + 2a^2x \Rightarrow x = 0, 4a$$

となるため、 D と l の交点は $(0,0)$, $(4a, -8a^3)$ である。

よって D と l で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned}
& \int_0^{4a} \{(-ax^2 + 2a^2x) - (-2a^2x)\} dx \\
&= -a \int_0^{4a} (x^2 - 4ax) dx \\
&= -a \left[\frac{x^3}{3} - 2ax^2 \right]_0^{4a} \\
&= \frac{32}{3} a^4
\end{aligned}$$

C と m との交点の x 座標を求めると

$$\frac{1}{2a^2}x = ax^2 - 2a^2x \Rightarrow x = 0, \frac{4a^4 + 1}{2a^3}$$

よって C と m で囲まれた図形の面積 T は $A = \frac{4a^4+1}{2a^3}$ とすると

$$\begin{aligned}
& \int_0^A \left\{ \frac{1}{2a^2}x - (ax^2 - 2a^2x) \right\} dx \\
&= -a \int_0^A (x^2 - Ax) dx \\
&= -a \left[\frac{x^3}{3} - A \frac{x^2}{2} \right]_0^A \\
&= a \times \frac{A^3}{6} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{(4a^4 + 1)^3}{8a^8}
\end{aligned}$$

となるのは a が実数であることから

$$\begin{aligned}
\frac{32}{3}a^4 &= \frac{1}{6} \times \frac{(4a^4 + 1)^3}{8a^8} \Rightarrow (4a^4 + 1)^3 = 512 a^{12} \\
&\Rightarrow 4a^4 + 1 = 8 a^4 \\
&\Rightarrow a^4 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

のときである。このとき、 $S = \frac{32}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$ である。