2013年度センター試験　数学2B

第3問

(1) 数列 $\{p_n\}$ は次を満たすとする。

$$p_1 = 3,\ p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3 \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

数列 $\{p_n\}$ の一般項と、初項から第 n 項までの和を求めよう。まず、① から

$$p_{n+1} - \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right) \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

となるので、数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$p_n = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}} \cdot \boxed{\text{エ}}^{n-2}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。したがって、自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} p_n = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(1 - \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}^{n-2}}\right) + \frac{\boxed{\text{コ}}\,n}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(2) 整数からなる数列 $\{a_n\}$ は、初項から第 3 項が $a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3$ であり、すべての自然数 n に対して

$$a_{n+3} = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+2}} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を満たすとする。また、数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ を、自然数 n に対して、$b_n = a_{2n-1},\ c_n = a_{2n}$ で定める。数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよう。まず、② から

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2}{a_3} = \boxed{\text{シ}}, \qquad a_5 = 3, \qquad a_6 = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}, \qquad a_7 = 3$$

である。したがって、$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 3$ となるので

$$b_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

と推定できる。

③ を示すためには、$b_1 = 3$ から、すべての自然数 n に対して

$$b_{n+1} = b_n \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

であることを示せばよい。このことを「まず、$n = 1$ のとき ④ が成り立つことを示し、次に $n = k$ のとき ④ が成り立つとすると、$n = k + 1$ のときも ④ が成り立つことを示す方法」を用いて証明しよう。この方法を $\boxed{ソ}$ という。$\boxed{ソ}$ に当てはまるものを、次の ⓪〜③ のうちから一つ選べ。

⓪　組立除法　　① 弧度法　　② 数学的帰納法　　③ 背理法

[Ⅰ] $n = 1$ のとき、$b_1 = 3,\ b_2 = 3$ であることから ④ は成り立つ。
[Ⅱ] $n = k$ のとき、④ が成り立つ。つまり

$$b_{k+1} = b_k \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

と仮定する。$n = k + 1$ のとき、② の n に $2k$ を代入して得られる等式と、$2k - 1$ を代入して得られる等式から

$$b_{k+2} = \frac{c_k + \boxed{ケ}_{k+1}}{\boxed{チ}_{k+1}}, \qquad c_{k+1} = \frac{\boxed{ツ}_k + c_k}{\boxed{テ}_{k+1}}$$

となるので、b_{k+2} は

$$b_{k+2} = \frac{\left(\boxed{ト}_k + \boxed{ナ}_{k+1}\right)\boxed{ニ}_k}{b_k + c_k}$$

と表される。したがって、⑤ により、$b_{k+2} = b_{k+1}$ が成り立つので、④ は $n = k + 1$ のときにも成り立つ。

[Ⅰ], [Ⅱ] により、すべての自然数 n に対して ④ の成り立つことが証明された。したがって、③ が成り立つので、数列 $\{b_k\}$ の一般項は $b_n = 3$ である。

次に、② の n を $2k - 1$ に置き換えて得られる等式と ③ から

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となり、$c_1 = \boxed{ヌ}$ であることと ① から、数列 $\{c_n\}$ の一般項は、(1) で定めた数列 $\{p_n\}$ の一般項と等しくなることがわかる。

数列 $\{p_n\}$ について、実数 x が

$$p_{n+1} - x = \frac{1}{3}(p_n - x) \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

を満たすとする。このとき

$$p_{n+1} - x = \frac{1}{3}p_n - \frac{x}{3} \Rightarrow \ p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}x$$

となる。この式と ① より $x = 3/2$ であることが分かる。つまり

$$p_{n+1} - \mathbf{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{3}{2}\right) \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

である。

数列 $\{q_n\}$ を $q_n = p_n - \dfrac{3}{2}$ を満たすものとする。このとき、上の式から $q_{n+1} = \dfrac{1}{3}\ q_n$ となるため、数列 $\{q_n\}$ は $q_1 = p_1 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$ 、公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。よって

$$q_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}}$$

このことから数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$p_n = q_n + \frac{3}{2} = \frac{1}{\mathbf{2 \cdot 3}^{n-2}} + \mathbf{\frac{3}{2}}$$

となる。したがって、自然数 n に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{k-2}} + \frac{3}{2} \times n \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\left(3 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) + \frac{3}{2}n \\ &= \mathbf{\frac{9}{4}}\left(1 - \frac{1}{\mathbf{3}^n}\right) + \frac{\mathbf{3}n}{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

(2) a_4 から a_7 を計算して求めると

$$a_4 = \frac{3+3}{3} = \mathbf{2}, \qquad a_5 = \frac{3+3}{2} = 3$$

$$a_6 = \frac{3+2}{3} = \mathbf{\frac{5}{3}}, \qquad a_7 = \frac{2+3}{5/3} = 3$$

したがって

$$b_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

と推定できる。

③ を示すためには、$b_1=3$ から、すべての自然数 n に対して

$$b_{n+1}=b_n \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

であることを示せばよい。このことを「ます、$n=1$ のとき ④ が成り立つことを示し、次に $n=k$ のとき ④ が成り立つとすると、$n=k+1$ のときも ④ が成り立つことを示す方法」を用いて証明しよう。この方法は **② 数学的帰納法** という。

[Ⅰ] $n=1$ のとき、$b_1=a_1=3,\ b_2=a_3=3$ であることから ④ は成り立つ。
[Ⅱ] $n=k$ のとき、④ が成り立つ。つまり

$$b_{k+1}=b_k \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

と仮定する。② の n に $2k$ を代入して得られる等式は

$$a_{2k+3}=\frac{a_{2k}+a_{2k+1}}{a_{2k+2}}$$

となる。ここで

$$a_{2k+3}=a_{2(k+2)-1}=b_{k+2}, \qquad a_{2k}=c_k$$
$$a_{2k+1}=a_{2(k+1)-1}=b_{k+1}, \qquad a_{2k+2}=c_{k+1}$$

より

$$b_{k+2}=\frac{c_k+\boldsymbol{b}_{k+1}}{\boldsymbol{c}_{k+1}}$$

が成り立つ。一方、② の n に $2k-1$ を代入して得られる等式から

$$a_{2k+2}=\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{a_{2k+1}} \Rightarrow c_{k+1}=\frac{\boldsymbol{b}_k+c_k}{\boldsymbol{b}_{k+1}}$$

が成り立つ。この２式より

$$b_{k+2}=(c_k+b_{k+1})\times\frac{1}{c_{k+1}}$$
$$=\frac{(\boldsymbol{c}_k+\boldsymbol{b}_{k+1})\,\boldsymbol{b}_{k+1}}{b_k+c_k}$$

と表される。したがって ⑤ により

$$b_{k+2}=(c_k+b_k)\times\frac{b_{k+1}}{b_k+c_k}$$
$$=b_{k+1}$$

つまり、$n=k+1$ のときも ④ が成り立つ。
　以上から、すべての自然数 n に対して $b_n=3$ が成り立つことが証明された。

　② の n を $2n-1$ に置き換えて得られる等式は

$$a_{2n+2}=\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_{2n+1}}$$

となる。先ほどの証明で ③ が成り立つため $a_{2n+1}=b_{n+1}=3$, $a_{2n-1}=b_n=3$ 、また $a_{2n+2}=c_{n+1}$, $a_{2n}=c_n$ となるため、上の式は

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+1$$

と表すことができる。さらに $c_1=a_2=\mathbf{3}$ であることから数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{c_n\}$ と等しいことが分かる。