2013 年度センター試験　数学 2 B

第 4 問

$OA = 5,\ OC = 4,\ \angle AOC = \theta$ である平行四辺形 $OABC$ において、線分 OA を $3 : 2$ に内分する点を D とする。また、点 A を通り直線 BD に垂直な直線と直線 OC の交点を E とする。ただし、$0 < \theta < \pi$ とする。

以下、$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ とおき、実数 t を用いて $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{c}$ と表す。

(1) t を $\cos\theta$ を用いて表そう。

$$\overrightarrow{AE} = t\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}, \qquad \overrightarrow{DB} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}, \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = \boxed{\text{ウエ}}\cos\theta$$

となるので、$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = \boxed{\text{オ}}$ により

$$t = \frac{\boxed{\text{カ}}\,(\boxed{\text{キ}}\cos\theta + 1)}{\boxed{\text{ク}}\,(\cos\theta + \boxed{\text{ケ}})} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

(2) 点 E は線分 OC 上にあるとする。θ のとり得る値の範囲を求めよう。ただし、線分 OC は両端の点 $O,\ C$ を含むものとする。以下、$r = \cos\theta$ とおく。

点 E が線分 OC 上にあることから、$0 \leqq t \leqq 1$ である。$-1 < r < 1$ なので、① の右辺の $\cos\theta$ を r に置き換えた分母 $\boxed{\text{ク}}\left(r + \boxed{\text{ケ}}\right)$ は正である。したがって、条件 $0 \leqq t \leqq 1$ は

$$0 \leqq \boxed{\text{カ}}\left(\boxed{\text{キ}}\ r + 1\right) \leqq \boxed{\text{ク}}\left(r + \boxed{\text{ケ}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる。

r についての不等式 ② を解くことにより、θ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}} \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$$

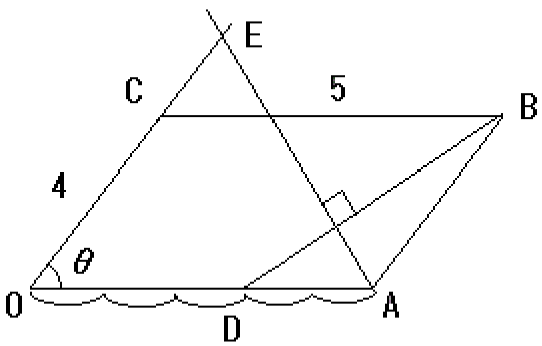
であることがわかる。

(3) $\cos\theta = -\dfrac{1}{8}$ とする。直線 AE と直線 BD の交点を F とし、三角形 BEF の面積を求めよう。① により、$t = \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$となり

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\overrightarrow{a} + \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\overrightarrow{c}$$

となる。したがって、点 F は線分 AE を $1:\boxed{テ}$ に内分する。このことと、平行四辺形 $OABC$ の面積は $\dfrac{\boxed{トナ}\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌ}}$ であることから、三角形 BEF の面積は

$\dfrac{\boxed{ネ}\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$ である。



(1) $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}, \qquad \overrightarrow{OD} = \frac{3}{5} \times \overrightarrow{OA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{a}$$

となる。したがって

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \mathbf{\frac{2}{5}}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$$

また

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OF} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\theta = \mathbf{20}\cos\theta$$

である。線分 $\overrightarrow{AE}$ と線分 $\overrightarrow{DB}$ は直交するため $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = \mathbf{0}$

上の式と $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$ より

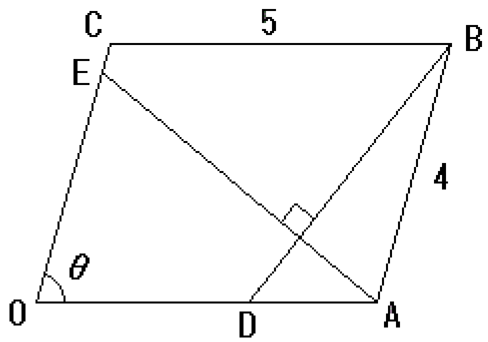
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB} &= (t\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})\cdot\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}\right)\\ &= -\frac{2}{5}|\overrightarrow{a}|^2 + \left(\frac{2}{5}\,t - 1\right)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} + t\,|\overrightarrow{c}|^2\\ &= -\frac{2}{5}\times 5^2 + \left(\frac{2}{5}\,t - 1\right)\times 20\ \cos\theta + t\ \times\ 4^2\\ &= (8\cos\theta + 16)\,t - 20\cos\theta - 10\end{aligned}$$

となるため、

$$(8\cos\theta + 16)\,t - 20\cos\theta - 10 = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{10\cos\theta + 5}{4\cos\theta + 8} = \frac{\mathbf{5}\,(\mathbf{2}\cos\theta + 1)}{\mathbf{4}\,(\cos\theta + \mathbf{2})}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

と表すことができる。

(2) 点 E は線分 OC 上にあるとする。θ のとり得る値の範囲を求めよう。ただし、線分 OC は両端の点 $O,\ C$ を含むものとする。以下、$r = \cos\theta$ とおく。



点 E が線分 OC 上にあることから、$0 \leqq t \leqq 1$ である。$-1 < r < 1$ なので、$4 < 4\,(\cos\theta + 2) = 4(\,r + 2) < 12$ となり、① の右辺の $\cos\theta$ を r に置き換えた分母 $4(\,r + 2)$ は正である。したがって、条件 $0 \leqq t \leqq 1$ は

$$0 \leqq 5\,(2\,r + 1) \leqq 4\,(r + 2)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

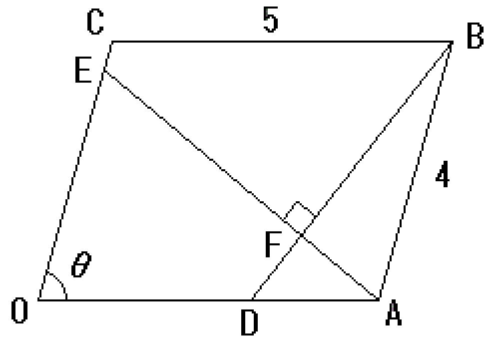
となる。$0 < \theta < \pi$ の範囲で ② の条件を満たす θ の値の範囲を求める。

$$0 \leqq 5\,(2\,r+1) \text{ より } r \geqq -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$$

$$5\,(2\,r+1) \leqq 4\,(r+2) \text{ より } r \leqq \frac{1}{2} \Rightarrow \theta \geqq \frac{\pi}{3}$$

このことから θ のとり得る値の範囲は $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi}$ である。

(3)



$\cos\theta = -\frac{1}{8}$ とする。AE と BD の交点を F として、三角形 BEF の面積を求める。① より

$$t = \frac{5\,\left(2 \times -\frac{1}{8} + 1\right)}{4\,\left(-\frac{1}{8} + 2\right)} = \frac{15/4}{15/2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

である。F が AE を $s:1-s$ に内分する点とすると

$$\overrightarrow{OF} = (1-s)\,\overrightarrow{OA} + s\,\overrightarrow{OE} = (1-s)\,\overrightarrow{a} + \frac{s}{2}\overrightarrow{c}$$

F が DB を $s':1-s'$ に内分する点とすると

$$\overrightarrow{OF} = (1-s')\,\overrightarrow{OB} + s'\,\overrightarrow{OD}$$

$$= (1-s')\,(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) + \frac{3}{5}s'\,\overrightarrow{a}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{5}s'\right)\overrightarrow{a} + (1-s')\overrightarrow{c}$$

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{c}$ は一次独立であるため、

$$\begin{cases} 1-s=1-\dfrac{2}{5}\ s' \\ \dfrac{s}{2}=1-s' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=\dfrac{1}{3} \\ s'=\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

したがって

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\ \overrightarrow{a}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\ \overrightarrow{c}$$

となり、点 F は AE を $\dfrac{1}{3}:\ \dfrac{2}{3}=1:\mathbf{2}$ に内分する。

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

より平行四辺形 $OABC$ の面積は

$$OA\times OC\times\sin\theta=5\times 4\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{\mathbf{15\sqrt{7}}}{\mathbf{2}}$$

である。三角形 ABF の面積は平行四辺形 $OABC$ の半分の $15\sqrt{7}/4$ である。

　三角形BEF：三角形$BFA=EF:FA=1:2$ となるため、三角形 BEF の面積は

$$\frac{15\sqrt{7}}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{7}}$$