

2013 年度センター試験 数学 2 B

第 5 問

次の表は、あるクラスの生徒 10 人に対して行われた国語と英語の小テスト（各 10 点満点）の得点をまとめたものである。ただし、小テストの得点は整数値をとり、 $C > D$ である。また、表の数値はすべて正確な値であり、四捨五入されていない。

番号	国語	英語
生徒 1	9	9
生徒 2	10	9
生徒 3	4	8
生徒 4	7	6
生徒 5	10	8
生徒 6	5	C
生徒 7	5	8
生徒 8	7	9
生徒 9	6	D
生徒 10	7	7
平均値	A	8.0
分散	B	1.00

以下、小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合、指定された桁まで ⑩ にマークすること。

(1) 10 人の国語の得点の平均値 A は $\boxed{ア}.\boxed{イ}$ 点である。また、国語の得点の分散 B の値は $\boxed{ウ}.\boxed{エ}$ である。さらに、国語の得点の中央値は $\boxed{オ}.\boxed{カ}$ 点である。

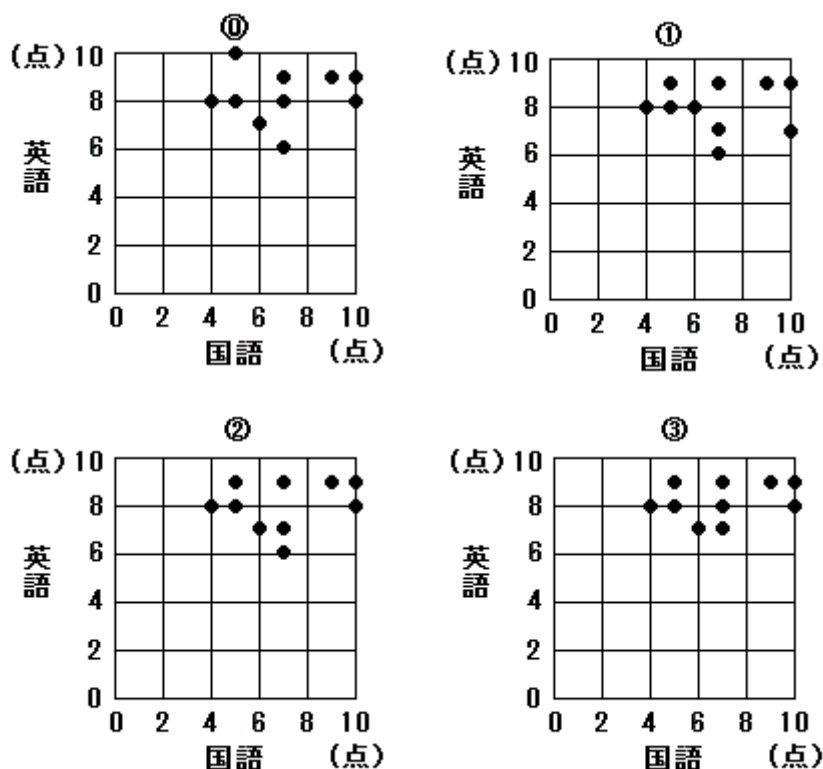
(2) 10 人の英語の得点の平均値が 8.0 点、分散が 1.00 であることから、 C と D の間には関係式

$$C + D = \boxed{クケ}$$

$$(C - 8)^2 + (D - 8)^2 = \boxed{コ}$$

が成り立つ。上の連立方程式と条件 $C > D$ により、 C, D の値はそれぞれ サ 点、シ 点であることがわかる。

(3) 10 人の国語と英語の得点の相関図（散布図）として適切なものは ス であり、国語と英語の得点の相関係数の値は セ・ソタチ である。ただし、ス については、当てはまるものを次の ① ～ ③ のうちから一つ選べ。



(4) 同じ 10 人に対して数学の小テスト（10 点満点）を行ったら、数学の得点の平均値はちょうど 4 点であり、分散はちょうど 1.44 であった。また、国語と数学の得点の相関係数はちょうど -0.125 であった。

ここで、 k を 1 から 10 までの自然数として、生徒 k の国語の点数を x_k 、数学の得点を y_k 、国語と数学の得点の合計 $x_k + y_k$ を w_k で表す。このとき、国語と数学の得点の合計 $w_1, w_2, \dots, w_{10}$ の平均値は ツテ・ト 点である。

次に、国語と数学の得点の合計 $w_1, w_2, \dots, w_{10}$ の分散を以下の手順で求めよう。国語の得点の平均値を $\bar{x}$ 、分散を s_x^2 、数学の得点の平均値を $\bar{y}$ 、分散を s_y^2 、国語と数学の得点の合計の平均値を $\bar{w}$ 、分散を s_w^2 で表す。このとき

$$T = (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_{10} - \bar{x})(y_{10} - \bar{y})$$

とおくと、国語と数学の得点の相関係数は -0.125 であるから

$$T = \boxed{\text{ナニ}} \cdot \boxed{\text{ヌネノ}}$$

である。また、 k を 1 から 10 までの自然数として、 $(w_k - \bar{w})^2$ は

$$\begin{aligned}(w_k - \bar{w})^2 &= \{(x_k + y_k) - (\bar{x} + \bar{y})\}^2 \\ &= \{(x_k - \bar{x}) + (y_k - \bar{y})\}^2\end{aligned}$$

と変形できる。これを利用して、分散 s_w^2 は

$$\begin{aligned}s_w^2 &= \frac{(w_1 - \bar{w})^2 + (w_2 - \bar{w})^2 + \cdots + (w_{10} - \bar{w})^2}{10} \\ &= s_x^2 + s_y^2 + \boxed{\text{ハ}} T\end{aligned}$$

と表すことができるので、分散 s_w^2 の値は $\boxed{\text{ヒ}} \cdot \boxed{\text{フヘ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{ハ}}$ については、当てはまるものを、次の ① ～ ③ のうちから一つ選べ。

① $\frac{1}{2}$

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{1}{10}$

③ $\frac{1}{20}$

(1) 国語の点数の分布を調べると

4 点 : 1 人、5 点 : 2 人、6 点 : 1 人、7 点 : 3 人、9 点 : 1 人、10 点 : 2 人であるため、国語の平均点は

$$\frac{1}{10}(4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 1 + 7 \times 3 + 9 \times 1 + 10 \times 2) = 7.0 \text{ 点}$$

国語の分散は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{10}((-3)^2 \times 1 + (-2)^2 \times 2 + (-1)^2 \times 1 + 0^2 \times 3 + 2^2 \times 1 + 3^2 \times 2) \\ &= 40/10 = 4.00\end{aligned}$$

国語の点数を大きい順に並べたとき 5 番目と 6 番目はともに 7 点であるため、中央値は 7.0 点。

(2) 英語の点数が分かっている 8 人の生徒の英語の点数の分布を調べると

6 点 : 1 人、7 点 : 1 人、8 点 : 3 人、9 点 : 3 人

であるため、英語の平均点は

$$\frac{1}{10}(6 \times 1 + 7 \times 1 + 8 \times 3 + 9 \times 3 + C + D) = \frac{1}{10}(C + D + 64) \text{点}$$

と表される。平均点は 8.0 点であることから

$$\frac{1}{10}(C + D + 64) = 8 \Rightarrow C + D = 16$$

また、英語の分散は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10}((-2)^2 \times 1 + (-1)^2 \times 1 + 0^2 \times 3 + 1^2 \times 3 + (C - 8)^2 + (D - 8)^2) \\ &= \frac{1}{10}\{(C - 8)^2 + (D - 8)^2 + 8\} \end{aligned}$$

と表される。分散は 1.00 であるため

$$\frac{1}{10}\{(C - 8)^2 + (D - 8)^2 + 8\} = 1 \Rightarrow (C - 8)^2 + (D - 8)^2 = 2$$

この 2 式から $C, D = 7, 9$ 。 $C > D$ より C, D の値はそれぞれ 9 点、7 点である。

(3) 選択肢の国語と英語の得点の相関図を比較する。

- ①：国語 7 点、英語 10 点の人はいない。
- ②：国語 10 点、英語 7 点の人はいない。
- ③：国語 7 点、英語 8 点の人はいない。

一方、②の相関図はすべての生徒を記されているため、正しい相関図は ② である。

国語と英語の得点の相関係数を求めるために、国語と英語の得点の共分散を求める。各生徒の 2 教科の平均との差の積を求めると以下の通りになる。

番号	国語の 平均と の差	英語の 平均と の差	2つの 平均の 積
生徒 1	2	1	2
生徒 2	3	1	3
生徒 3	-3	0	0
生徒 4	0	-2	0
生徒 5	3	0	0
生徒 6	-2	1	-2
生徒 7	-2	0	0
生徒 8	0	1	0
生徒 9	-1	-1	1
生徒 10	0	-1	0

以上から共分散の値は

$$\frac{1}{10}(2 + 3 + (-2) + 1 + 0 \times 6) = 0.400$$

国語と英語の得点の分散はそれぞれ 4.00, 1.00 であるため、相関係数は

$$\frac{0.400}{\sqrt{4.00} \times \sqrt{1.00}} = \mathbf{0.200}$$

(4) k を 1 から 10 までの自然数として、生徒 k の国語の点数を x_k 、数学の得点を y_k 、国語と数学の得点の合計 $x_k + y_k$ を w_k で表す。このとき、国語と数学の得点の合計 $w_1, w_2, \dots, w_{10}$ の平均値を求めると

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{10}(w_1 + w_2 + \dots + w_{10}) \\
&= \frac{1}{10}\{(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_{10} + y_{10})\} \\
&= \frac{1}{10}(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + \frac{1}{10}(y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) \\
&= 7.0 + 5.4 \\
&= \mathbf{12.4}
\end{aligned}$$

国語と数学の得点の合計 $w_1, w_2, \dots, w_{10}$ の分散を求める。国語の得点の平均値を $\bar{x}$ 、分散を s_x^2 、数学の得点の平均値を $\bar{y}$ 、分散を s_y^2 、国語と数学の得点の合計の平均値を $\bar{w}$ 、分散を s_w^2 で表す。このとき

$$T = (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_{10} - \bar{x})(y_{10} - \bar{y})$$

とおく。相関係数は

$$\frac{T/10}{s_x \times s_y}$$

によって求められるため、

$$\begin{aligned} T &= -0.125 \times s_x \times s_y \times 10 \\ &= -0.125 \times \sqrt{1.44} \times \sqrt{4} \times 10 \\ &= -0.125 \times 1.2 \times 2 \times 10 \\ &= \mathbf{-3.000} \end{aligned}$$

である。

また、 k を 1 から 10 までの自然数として、 $(w_k - \bar{w})^2$ は

$$\begin{aligned} (w_k - \bar{w})^2 &= \{(x_k + y_k) - (\bar{x} + \bar{y})\}^2 \\ &= \{(x_k - \bar{x}) + (y_k - \bar{y})\}^2 \end{aligned}$$

と変形できる。これを利用して、分散 s_w^2 は

$$\begin{aligned} s_w^2 &= \frac{(w_1 - \bar{w})^2 + (w_2 - \bar{w})^2 + \dots + (w_{10} - \bar{w})^2}{10} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{10} (x_k - \bar{x})^2 + \sum_{k=1}^{10} (y_k - \bar{y})^2 + \sum_{k=1}^{10} 2(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{10} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} (x_k - \bar{x})^2 + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} (y_k - \bar{y})^2 + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} 2(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\ &= s_x^2 + s_y^2 + \frac{1}{5} T \end{aligned}$$

(☐) には選択肢 ① が入る) と表すことができるので、分散 s_w^2 の値は

$$s_w^2 = 4.00 + 1.44 + \frac{1}{5} \times (-3.00) = \mathbf{4.84}$$

である。