

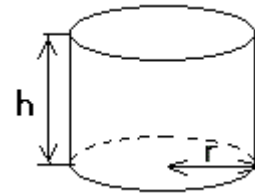
2013 年度センター試験 工業数理基礎

第 1 問

問 1. 円筒形の容器の表面積が定数 S [m²] で与えられているとき、体積 V [m³] が最大になるとき、容器の底面の半径 r [m] と容器の高さ h [m] の関係を考える。

まず容器の表面積を求める。

$$\begin{aligned}\text{上面と底面の面積の合計：} & 2 \times \pi r^2 = 2\pi r^2 \\ \text{側面の面積：} & 2\pi r \times h = 2\pi r h\end{aligned}$$



であるため、

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (1)$$

また体積 V は

$$V = \pi r^2 \times h = \pi r^2 h \quad (2)$$

(1) より

$$h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{S}{2\pi r} - r$$

この式を (2) に代入すると

$$V = \pi r^2 \times \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3 \quad (3)$$

$V > 0$ を満たす r の範囲は

$$\frac{Sr}{2} - \pi r^3 > 0 \Rightarrow r^2 - \frac{S}{2\pi} < 0 \Rightarrow 0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$$

である。この範囲で V が最大になるときの r の値 r_1 [m] は $\frac{dV}{dr} = 0$ を解く

ことで求めることができる。式 (3) を r で微分すると

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 \quad (4)$$

となる。式 (4) から $\frac{dV}{dr} = 0$ を解くと、

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow 3\pi r^2 = \frac{S}{2} \Rightarrow r = \pm \sqrt{S/6\pi}$$

r の範囲 $0 < r < \sqrt{S/2\pi}$ にあるのは

$$r_1 = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

この式から

$$S = 6\pi r_1^2$$

となる。(1) に代入すると

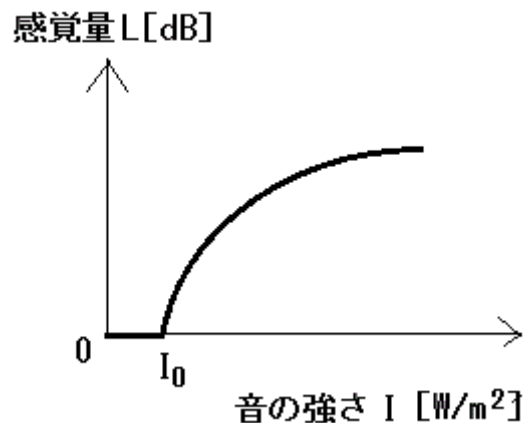
$$h = \frac{S}{2\pi r_1} - r_1 = 2r_1$$

となるため、体積が最大になるのは、容器の直径と高さが等しい場合である。

問 1 の解答

ア	イ	ウ	エ
2	5	1	5

問 2. 音の大きさ（強さ）と人が聞いたときに感じる音の大きさ（以下、感覚量と表す）の関係を考える。音の大きさ I は、音が進む方向に垂直な単位面積を単位時間あたりに通過する音のエネルギーのことで、単位を $[\text{W}/\text{m}^2]$ として表す。一方、感覚量 L は単位を $[\text{dB}]$ （デシベル）とする量で表す。



音の強さが一定以下であるとき、人は音を感じ取ることができない。人の感覚が生じる最小の音の大きさ I_0 を最小可聴値という。

$I \geq I_0$ のとき、 I と L の関係は、式 (6) で表すことができる。

$$L = 10 \log_{10} I + C \quad (C : \text{定数}) \quad (6)$$

ここで、図 3 から $I = I_0$ のとき $L = 0$ なので、式 (6) より、

$$0 = 10 \log_{10} I_0 + C \Rightarrow C = -10 \log_{10} I_0$$

となるため、定数 C が具体的に定まり、式(7) が得られる。

$$L = 10 \log_{10} I - 10 \log_{10} I_0 = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (7)$$

式 (7) を用いて、日常生活で体験する音の強さと人の感覚との関係を調べてみる。表 1 に身近な場所における音の強さと感覚量を示している。

表 1

場所	音の強さ I [W/m^2]	感覚量 L [dB]
静かな住宅地	10^{-9}	30
オフィス	10^{-8}	40
ガード下	10^{-3}	クケ

この表からガード下における、音の強さに対する感覚量を計算してみよう。

オフィスでは $I = 10^{-8}$, $L = 40$ であるため、

$$\begin{aligned} 40 &= 10 \log_{10} \frac{10^{-8}}{I_0} \Rightarrow \frac{10^{-8}}{I_0} = 10^4 \\ &\Rightarrow I_0 = \frac{10^{-8}}{10^4} = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2 \end{aligned}$$

このことから $I = 10^{-3}$ であるガード下における感覚量は

$$L = 10 \log_{10} \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \log_{10} 10^9 = 90$$

である。

つまり音の強さは 10^5 倍であるが、感覚量は $90 / 40 = 2.25 = 2.25 \div 2.3$ 倍となる。

オフィスの音の強さが 2×10^{-8} と 2 倍になると

$$L = 10 \log_{10} \frac{2 \times 10^{-8}}{10^{-12}} = 10 \log_{10} 2 \times 10^4 = 40 + 10 \times 0.30 = 43$$

となり、感覚量は **3 dB** 増加する。

一般に音の強さが I から $2I$ の2倍になると、

$$L = 10 \log_{10} \frac{2I}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} + 10 \log_{10} 2 = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} + 3$$

となるため増加量は I によらず一定。つまりガード下でもオフィスでも感覚量の増加量は**等しくなる**。

問2の解答

オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
1	1	2	9	0	3	3	2