

2013 年度センター試験 工業数理基礎

第 3 問

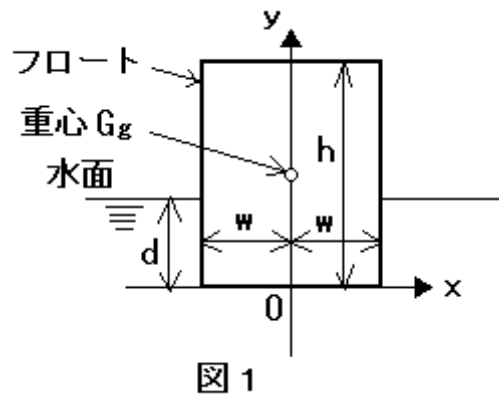
直方体の形状をしたフロート（浮き）の横転に対する安定性について考える。

形状：幅 $2w$ [m]、高さ h [m]、奥行き 1 m.

密度： ρ [kg/m^3]

重力加速度： g [m/s^2]

また、フロート断面上の各点の位置を表すために、図のようにフロート断面上に原点 O をとり、 x 軸と y 軸を定める。



問 1 フロートが傾いていない場合について考える。フロートに作用する重力の大きさ F_g [N] は $F_g = 2wh\rho g$ と表される。また、水の密度を ρ_0 [kg/m^3] ($\rho_0 > \rho$)、フロートの沈下量を d [m] とする。

この時、フロートに作用する浮力は沈下したフロートの体積と同じ体積の水の重力の大きさに等しい。このため浮力は

$$F_f = (2w \times d \times 1) \times \rho_0 \times g = 2wd\rho_0 g$$

となる。

フロートが浮いているとき、フロートにかかる浮力と重力の大きさが等しい。

つまり、 $F_f = F_g$ が成り立つ。よって d を h で表すと

$$2wd\rho_0 g = 2wh\rho g \Rightarrow d = \frac{\rho}{\rho_0} h$$

となる。

問2 フロートが θ [rad] 傾き、水面下のフロート断面が台形 $ABDE$ となる場合を考える。このとき浮力の作用点は台形 $ABDE$ の図心になる。図心の座標を求める。

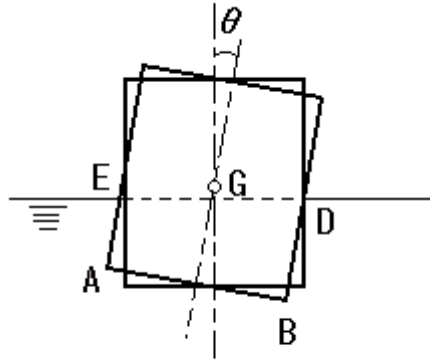


図2

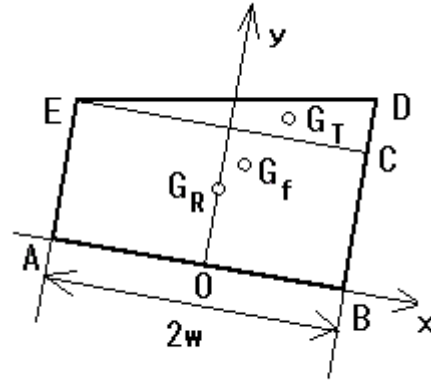


図3

台形 $ABDE$ の図心 $G_f(x_f, y_f)$ は三角形 CDE の図心 G_T 、長方形 $ABCE$ の図心 G_R 、各図形の面積から求めることができる。

三角形 CDE は $\angle CDE = \theta$, $\angle DCE = 90^\circ$ であるため、

$$CD = CE \times \tan \theta = 2w \tan \theta$$

次に線分 AE の長さを求める。台形 $ABDE$ は問1の状態の水が排除された領域の断面積 $2wd$ と等しい。

$$\text{三角形 } CDE \text{ の面積} = 2w \times CD \times \frac{1}{2} = 2w^2 \tan \theta$$

$$\text{長方形 } ABCE \text{ の面積} = 2w \times EA$$

であるため、

$$2w^2 \tan \theta + 2w \times EA = 2wd$$

$$\Rightarrow w \tan \theta + EA = d$$

$$\Rightarrow EA = d - w \tan \theta$$

となる。すなわち長方形 $ABCE$ の面積は

$$2w \times (d - w \tan \theta) = 2w(d - w \tan \theta)$$

と表すことができる。

三角形 CDE の図心の x 座標は $(-w + w + w) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}w$ 、 y 座標は

$$\{(d - w \tan \theta) + (d - w \tan \theta) + (d + w \tan \theta)\} \times \frac{1}{3} = d - \frac{1}{3}w \tan \theta$$

である。一方長方形 $ABCE$ の x 座標は 0 、 y 座標は

$$\frac{1}{2} \times EA = \frac{1}{2} (d - w \tan \theta)$$

である。

一方 軸周りのモーメントの釣り合いから以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \left(\text{台形 } ABDE \text{ の面積} \right) \times \left(G_f \text{ から } y \text{ 軸までの距離} \right) \\ &= \left(\text{三角形 } CDE \text{ の面積} \right) \times \left(G_T \text{ から } y \text{ 軸までの距離} \right) \\ &+ \left(\text{長方形 } ABCE \text{ の面積} \right) \times \left(G_R \text{ から } y \text{ 軸までの距離} \right) \end{aligned}$$

台形 $ABDE$ の面積は $2wd$ であるため、この関係式の左辺は $2wdx_f$ 一方この関係式の右辺は

$$2w^2 \tan \theta \times \frac{1}{3} w + 2w(d - w \tan \theta) \times 0 = \frac{2}{3} w^3 \tan \theta$$

となる。以上から x_f を求めると

$$2wdx_f = \frac{2}{3} w^3 \tan \theta \Rightarrow x_f = \frac{w^2}{3d} \tan \theta$$

となる。

同様にして y_f を求める。

$$G_f \text{ から } x \text{ 軸までの距離} = y_f$$

$$G_T \text{ から } x \text{ 軸までの距離} = d - \frac{1}{3} w \tan \theta$$

$$G_R \text{ から } x \text{ 軸までの距離} = \frac{1}{2} (d - w \tan \theta)$$

となるため、

$$\begin{aligned} 2wdy_f &= 2w^2 \tan \theta \times \left(d - \frac{1}{3} w \tan \theta \right) \\ &+ 2w(d - w \tan \theta) \times \frac{1}{2} (d - w \tan \theta) \\ &= wd^2 + \frac{1}{3} w^3 \tan^2 \theta \\ \Rightarrow y_f &= \frac{1}{2} d + \frac{w^2}{6d} \tan^2 \theta \end{aligned}$$

以上から図心 G_f の座標は $\left(\frac{w^2}{3d} \tan \theta, \frac{1}{2} d + \frac{w^2}{6d} \tan^2 \theta \right)$ に求まる。

安定性については、フロートの重心 G_g と浮力の作用点 G_f が図 4 (a) のような関係にあるときは、傾きを減少させる方向に力が作用するため、フロートは安定となる。一方、図 4 (b) のような関係にあるときは、傾きを増加させる方向に力が作用するため、フロートは不安定となる。

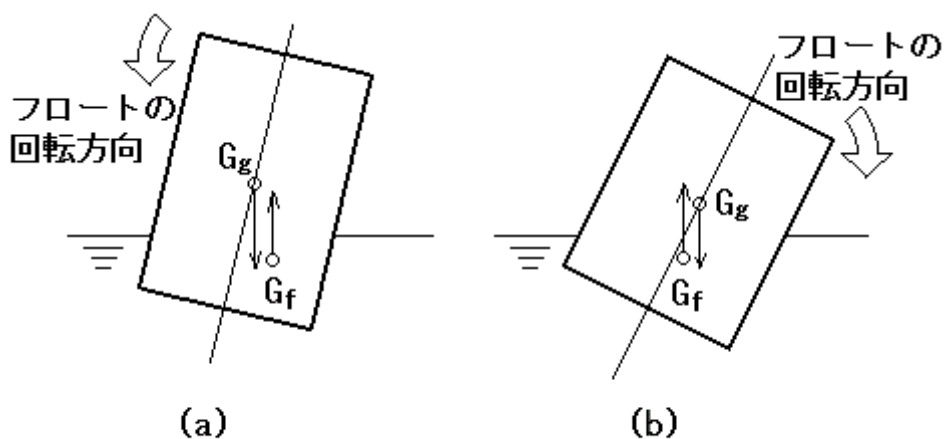


図 4

問 3 フロートが安定になる条件を数式で表すことを考える。図 4 の (a) の状態と (b) の状態が切り替わる限界の状態では、重力の作用する G_g と浮力の作用する G_f の位置が回転を打ち消し合う配置となる。

このとき $G_f(x_f, y_f)$ と $G_g(0, \frac{h}{2})$ は図 5 のような関係になる。

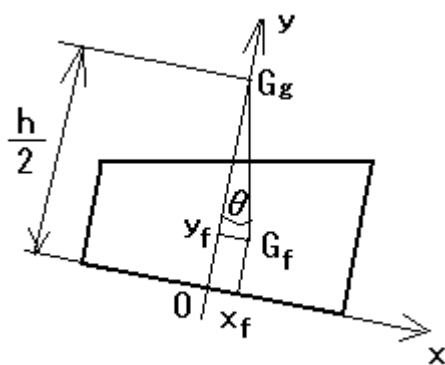


図 5

この図において、色づけされた部分は直角三角形になる。 $\frac{h}{2} - y_f$ と x_f の比を θ の三角比で表して整理すると

$$\frac{x_f}{\frac{h}{2} - y_f} = \tan \theta \Rightarrow \frac{1}{\tan \theta} x_f + y_f = \frac{h}{2} \quad (1)$$

となる。

式 (1) の左辺が右辺より大きいときつまり、

$$\frac{1}{\tan \theta} x_f + y_f > \frac{h}{2} \quad (2)$$

のときフロートが安定する。

この式 (2) に $x_f = \frac{w^2}{3d} \tan \theta$, $y_f = \frac{1}{2} d + \frac{w^2}{6d} \tan^2 \theta$ を代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tan \theta} \times \frac{w^2}{3d} \tan \theta + \left(\frac{1}{2} d + \frac{w^2}{6d} \tan^2 \theta \right) > \frac{h}{2} \\ \Rightarrow & \frac{w^2}{3d} + \left(\frac{1}{2} d + \frac{w^2}{6d} \tan^2 \theta \right) > \frac{h}{2} \\ \Rightarrow & 2w^2 + 3d^2 + w^2 \tan^2 \theta > 3hd \\ \Rightarrow & 2w^2 - 3hd + 3d^2 + w^2 \tan^2 \theta > 0 \quad (3) \end{aligned}$$

この条件の使用例として、 $h = 4\text{m}$, $w = \sqrt{5}\text{m}$, $\rho = \frac{1}{4}\rho_0$ の場合について考えてみよう。この場合、静止状態での沈下量 d の値は式 (1) より、

$$d = \frac{\rho}{\rho_0} \times h = \frac{1}{4} \times 4 = 1\text{m}$$

となるため、この値を式 (3) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} & 3 \times 1^2 - 3 \times 4 \times 1 + 2 \times (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 \tan^2 \theta \\ & = 3 - 12 + 10 + 5 \tan^2 \theta \\ & = 1 + 5 \tan^2 \theta \end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \pi/2$ で $\tan \theta > 0$ であるため、この値は常に正である。つまり式 (3) は成り立つため、このフロートは安定になる。

第3問 正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
1	5	4	1	1	2	1	0