2014 年度センター試験　数学 1

第 1 問

［1］　$a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ とする。

(1)　$ab=\boxed{\text{ア}}$

$$a+b=\boxed{\text{イ}}\left(\boxed{\text{ウエ}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\right)$$

$$a^2+b^2=\boxed{\text{カ}}\left(\boxed{\text{キ}}-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\right)$$

である。

(2)　$ab=\boxed{\text{ア}}$ と $a^2+b^2+4(a+b)=\boxed{\text{ケコ}}$ から、a は

$$a^4+\boxed{\text{サ}}a^3-\boxed{\text{シス}}a^2+\boxed{\text{セ}}a+\boxed{\text{ソ}}=0$$

を満たすことがわかる。

---

(1)

$$ab=\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\frac{1-3}{1-2}=\ \mathbf{2}$$

a,b を変形すると以下の通りになる。

$$a\ =\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\ =\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1-2}\ =\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$$

$$b \quad = \frac{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} \ = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1-2} \ = \sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$$

このことから

$$a+b=(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)+(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)$$

$$=-2+2\sqrt{6}$$

$$=\mathbf{2}(-\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{6}})$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2\,ab$$

$$=(-2+2\sqrt{6})^2-2\times 2$$

$$=4-8\sqrt{6}+24\ -4$$

$$=24-8\sqrt{6}$$

$$=\mathbf{8}\,(\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{6}})$$

⑵　⑴の結果から

$$a^2+b^2+4(a+b)=24-8\sqrt{6}+4(-2+2\sqrt{6})$$
$$=24-8$$
$$=\mathbf{16}$$

となる。この式の両辺に a^2 を掛ける。

$$a^4+a^2b^2+4(a^3+a^2\,b)=16\,a^2$$
$$\Rightarrow a^4+(ab)^2+4a^3+4a\times ab-16\,a^2=0$$

$ab=2$ より

$$a^4+4+4a^3+8a-16\,a^2=0$$
$$\Rightarrow a^4+\mathbf{4}\,a^3-\mathbf{16}\,a^2+\mathbf{8}a+\mathbf{4}=0$$

[2] 下の タ、テ、ネ、ノ、ヒ には、次の 0.〜3. のうちからあてはまるものを一つ選べ。ただし、同じものを繰り返して選んでもよい。

0. ＞　1. ＜　2. ≧　3. ≦

a を変数とし、連立不等式

$$\begin{cases} x-6a \geqq -1 \cdots\cdots ① \\ |x+a-1|<5 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。

(1) $x=1$ が不等式 ① を満たすような a の値の範囲を表す不等式は

$a\ \boxed{タ}\ \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。

(2) $x=2$ が不等式 ① を満たさないような a の値の範囲を表す不等式は

$a\ \boxed{テ}\ \dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ である。

(3) $a=0$ のとき、連立不等式 ①, ② の解は

$$\boxed{ニヌ}\ \boxed{ネ}\ x\ \boxed{ノ}\ \boxed{ハ}$$

である。

(4) 不等式 ② の解と、連立不等式 ①, ② の解とが一致するような a の値の範囲を表す不等式は $a\ \boxed{ヒ}\ \dfrac{\boxed{フヘ}}{\boxed{ホ}}$ である。

---

(1) $x=1$ が不等式 ① を満たすとき

$$1-6a \geqq -1 \Rightarrow a \leqq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$ (不等式は **3.** が当てはまる)

(2) $x=2$ が不等式 ① を満たさないとき

$$2-6a<-1 \Rightarrow a>\mathbf{\frac{1}{2}}\ \left(\text{不等式は }\mathbf{0}.\text{ が当てはまる}\right)$$

(3) $a=0$ のときの ①，② の解を求める。

① $x \geqq -1$
② $|x-1|<5 \ \Rightarrow\ -5<x-1<5 \ \Rightarrow\ -4<x<6$

以上より ①，② の共通部分は

$$\mathbf{-1} \leqq x < \mathbf{6}$$

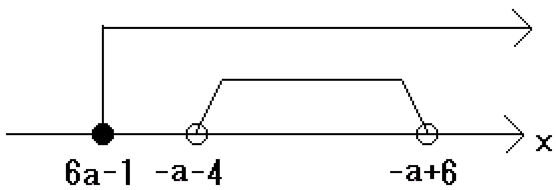
(不等式は順に **3, 1**.）となる。

(4) 不等式 ② の解は

$$-5<x+a-1<5 \ \Rightarrow\ -a-4<x<-a+6$$

一方、不等式 ① の解は $x \geqq 6a-1$

② の解が ①，② の共通解と一致するとき、① の解が ② の解の範囲を含まなければならない。



このことから

$$6a-1 \leqq -a-4 \Rightarrow 7a \leqq -3$$
$$\Rightarrow a \leqq \mathbf{\frac{-3}{7}}$$

(不等式は **3.** が当てはまる）となる。