2014 年度センター試験　数学１

第２問

a を定数とし、x の２次関数

$$y = x^2 + 2\,a\,x + 3\,a^2 - 6\,a - 36 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{ア}\,a,\ \boxed{イ}\,a^2 - \boxed{ウ}\,a - \boxed{エオ}\right)$$

である。G と y 軸との交点の y 座標を p とする。

(1)　$p = -27$ のとき、a の値は $a =$ **カ** , **キク** である。$a =$ カ のときの ① のグラフを x 軸方向に **ケ** 、y 軸方向に **コ** だけ平行移動すると、$a =$ キク のときの ① のグラフに一致する。

(2) 下の ス、セ、ノ、ハ には、次の０．～３．のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

0. ＞　　1. ＜　　2. ≧　　3. ≦

G が x 軸と共有点を持つような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{サシ}\ \boxed{ス}\ a\ \boxed{セ}\ \boxed{ソ} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である。a が ② の範囲にあるとき、p は、$a =$ **タ** で最小値 **チツテ** をとり、$a =$ **ト** で最大値 **ナニ** をとる。

G が x 軸と共有点を持ち、さらにそのすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{\text{ヌネ}}\ \boxed{\text{ノ}}\ a\ \boxed{\text{ハ}}\ \frac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

$$x^2 + 2\,ax + 3\,a^2 - 6\,a - 36 = (x + a)^2 + 2\,a^2 - 6\,a - 36$$

であるため、G の頂点の座標は

$$(-a, \mathbf{2}\,a^2 - \mathbf{6}\,a - \mathbf{36})$$

である。

G と y 軸との交点は $(0,\ 3\,a^2 - 6\,a - 36)$ であるため $p = 3\,a^2 - 6\,a - 36$ となる。

(1) $p = -27$ のとき

$$3\,a^2 - 6\,a - 36 = -27 \Rightarrow\ 3\,a^2 - 6\,a - 9 = 0$$
$$\Rightarrow a = \mathbf{3}\,, \mathbf{-1}$$

$a = 3$ のときの頂点の座標は $(-3, -36)$
$a = -1$ のときの頂点の座標は $(1, -28)$

このことから、$a = 3$ のときの ① のグラフを x 軸方向に $1 - (-3) = \mathbf{4}$ 、y 軸方向に $-28 - (-36) = \mathbf{8}$ だけ平行移動すると、$a = -1$ のときの ① のグラフに一致する。

(2) グラフ G が x 軸と共有点を持つとき、頂点の y 座標は 0 以下でなければならないため、

$$2\,a^2 - 6\,a - 36 \leqq 0$$
$$\Rightarrow a^2 - 3\,a - 18 = (a - 6)(a + 3) \leqq 0$$
$$\Rightarrow \mathbf{-3} \leqq a \leqq \mathbf{6}$$

（不等式は順に **3, 3.** が当てはまる）となる。この条件を ② とする。

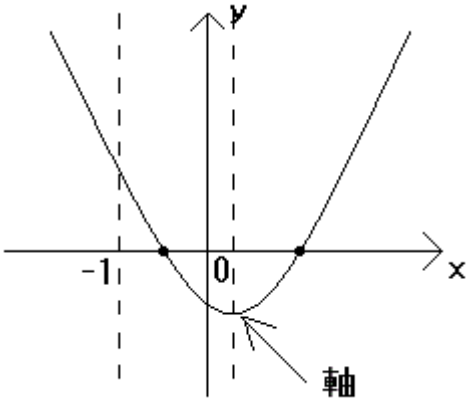
$$p = a^2 - 6\,a - 36 = 3\,(a - 1)^2 - 39$$

より a の関数としての p の増減表を $-3 \leqq a \leqq 6$ の範囲で求めると以下の通りになる。

a	-3		1		6
p	9	減少	-39	増加	36

よって p は $a=\mathbf{1}$ で最小値 $\mathbf{-39}$ 、$a=\mathbf{6}$ で最大値 $\mathbf{36}$ をとる。

グラフ G が x 軸と共有点を持ち、それらの x 座標が -1 より大きくなるためには、上の ② の条件の他に以下の２つの条件が必要である。

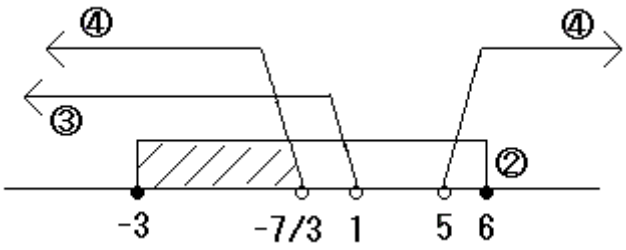


・グラフ G の軸の x 座標が -1 より大きい。$\Leftrightarrow -a>-1 \Leftrightarrow a<1.$ この条件を ③ とする。

・$x=-1$ のときの y 座標が正である。

$$\Leftrightarrow 1-2a+3a^2-6a-36>0$$
$$\Leftrightarrow 3a^2-8a-35=(3a+7)(a-5)>0$$
$$\Leftrightarrow a<-\frac{7}{3},\ 5<a$$

この条件を ④ とする。



３個の条件 ②，③，④ の共通部分は

$$\boldsymbol{-3 \leqq a < \frac{-7}{3}}$$

である。