2014年度センター試験　数学1

第3問

三角形 ABC は、$AB=4, BC=2, \cos\angle ABC=\dfrac{1}{4}$ を満たすとする。このとき

$$CA=\boxed{ア}, \qquad \sin\angle ABC=\frac{\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$$

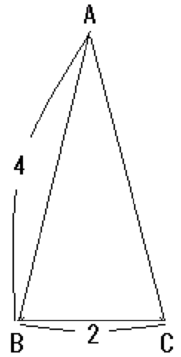
であり、三角形 ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{クケ}}$ である。
三角形 ABC の外接円と $\angle ABC$ の二等分線との交点で B と異なる点を D とし、直線 AD と直線 BC の交点を E とする。このとき、三角形 ACE の内角 $\angle CAE$ と外角 $\angle ACB$ の間には $\angle CAE=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\angle ACB$ の関係があるので、

$CE=\boxed{シ}$ である。したがって $AE=\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セソ}}$ である。

$\angle ABC$ の二等分線と $\angle BAC$ の二等分線の交点を D、直線 BD と辺 AC の交点を E、直線 BD と円 O との交点で B と異なる交点を F とする。

三角形 ACE と三角形 ADC を比較することにより、三角形 ACE の面積は三角形 ADC の面積の $\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ 倍であることと、 $AD=\dfrac{\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テト}}}{\boxed{ナ}}$ であることがわかる。

以上から、三角形 ADC の面積は $\dfrac{\boxed{ニ}\sqrt{\boxed{ヌネ}}}{\boxed{ノ}}$ である。



余弦定理より

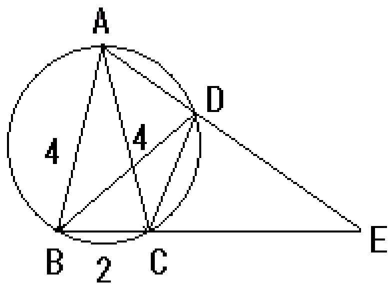
$$\begin{aligned}CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC \cos\angle ABC \\ &= 16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{4} \\ &= 16\end{aligned}$$

$CA > 0$ より $CA = \mathbf{4}$。また

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2\angle ABC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{4}}$$

三角形 ABC の外接円 O の半径を R とする。正弦定理より

$$2R = \frac{CA}{\sin\angle ABC} = 4 \times \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{15}}$$



$AB = AC$ より、$\angle ACB = \angle ABC$ 。BD は $\angle ABC$ の二等分線であるため

$$\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ACB = \mathbf{\frac{1}{2}}\angle ABC$$

三角形 ACE において

$$\angle CEA = \angle ACB - \angle CAE = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle CAE$$

となるため三角形 ACE は二等辺三角形。よって $CE = AC = \mathbf{4}$

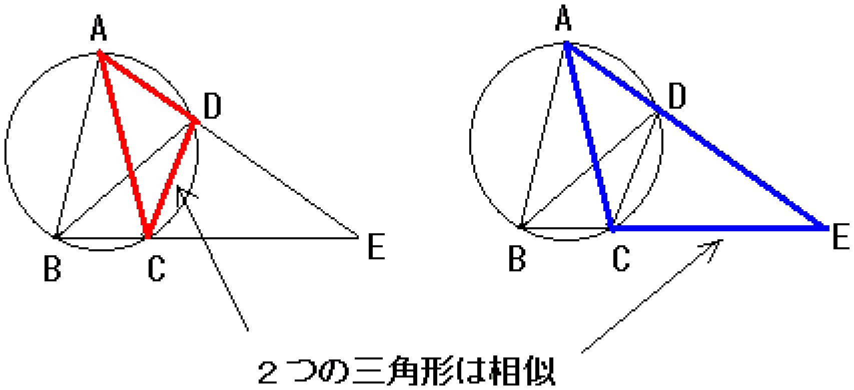
三角形 ABE に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} AE^2 &= AB^2 + BE^2 - 2 \times AB \times BE \times \cos\angle ABE \\ &= 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{4} \\ &= 40 \end{aligned}$$

$AE > 0$ より $AE = \sqrt{40} = \mathbf{2\sqrt{10}}$

三角形 ADC は $\angle CAD = \angle ACD$ より二等辺三角形である。$\angle CAD = \angle EAC$ であることから三角形 ADC は同じく二等辺三角形である三角形 ACE と相似である。よって

$$ACE : ADC = AE^2 : AC^2 = 40 : 16 = 5 : 2$$



つまり、三角形 ADC の面積は三角形 ACE の面積の $\mathbf{\frac{2}{5}}$ 倍である。このことから

$$AD = \frac{2}{5} \times AE = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{10}}{5}}$$

三角形 ADC で D から AC に下した垂線の足を T とする。$AT = 2$ より

$$DT = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\sqrt{10}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{32}{5} - 4} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$$

よって三角形 ADC の面積は

$$\frac{1}{2} \times AC \times DT = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2}{5}\sqrt{15} = \boldsymbol{\frac{4}{5}\sqrt{15}}$$