2014 年度センター試験　数学 1A

第 1 問

［1］　$a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$ ，$b = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ とする。

(1)　$ab = \boxed{\text{ア}}$

$$a + b = \boxed{\text{イ}}\left(\boxed{\text{ウエ}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}}\right)$$

$$a^2 + b^2 = \boxed{\text{カ}}\left(\boxed{\text{キ}} - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}\right)$$

である。

(2)　$ab = \boxed{\text{ア}}$ と $a^2 + b^2 + 4\,(a + b) = \boxed{\text{ケコ}}$ から、a は

$$a^4 + \boxed{\text{サ}}\,a^3 - \boxed{\text{シス}}\,a^2 + \boxed{\text{セ}}\,a + \boxed{\text{ソ}} = 0$$

を満たすことがわかる。

---

(1)

$$ab = \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-3}{1-2} = \mathbf{2}$$

a, b を変形すると以下の通りになる。

$$a = \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1-2} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$$

$$b \;=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}\;=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1-2}\;=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$$

このことから

$$a+b=\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1\right)$$

$$=-2+2\sqrt{6}$$

$$=\mathbf{2}\left(-\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{6}}\right)$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2\,ab$$

$$=\left(-2+2\sqrt{6}\right)^2-2\times 2$$

$$=4-8\sqrt{6}+24\ -4$$

$$=24-8\sqrt{6}$$

$$=\mathbf{8}\left(\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{6}}\right)$$

⑵　⑴ の結果から

$$a^2+b^2+4(a+b)=24-8\sqrt{6}+4\left(-2+2\sqrt{6}\right)$$
$$=24-8$$
$$=\mathbf{16}$$

となる。この式の両辺に a^2 を掛ける。

$$a^4+a^2b^2+4(a^3+a^2\,b)=16\,a^2$$
$$\Rightarrow a^4+(ab)^2+4a^3+4a\times ab-16\,a^2=0$$

$ab=2$ より

$$a^4+4+4a^3+8\,a-16\,a^2=0$$
$$\Rightarrow a^4+\mathbf{4}\,a^3-\mathbf{16}\,a^2+\mathbf{8}\,a+\mathbf{4}=0$$

［2］ 集合 U を $U=\left\{n \middle| n \text{ は } 5<\sqrt{n}<6 \text{ を満たす自然数}\right\}$ で定め、また、U の部分集合 $P,\ Q,\ R,\ S$ を次のように定める。

$$P=\left\{n \middle| n\in U \text{ かつ } n \text{ は } 4 \text{ の倍数}\right\}$$

$$Q=\left\{n \middle| n\in U \text{ かつ } n \text{ は } 5 \text{ の倍数}\right\}$$

$$R=\left\{n \middle| n\in U \text{ かつ } n \text{ は } 6 \text{ の倍数}\right\}$$

$$S=\left\{n \middle| n\in U \text{ かつ } n \text{ は } 7 \text{ の倍数}\right\}$$

全体集合を U とする。集合 P の補集合を $\overline{P}$ で表し、同様に $Q,\ R,\ S$ の補集合をそれぞれ $\overline{Q},\ \overline{R},\ \overline{S}$ で表す。

(1) U の要素の個数は $\boxed{\textbf{タチ}}$ 個である。

(2) 次の ０．～４．で与えられた集合のうち、空集合であるものは $\boxed{\textbf{ツ}}$、$\boxed{\textbf{テ}}$ である。
$\boxed{\text{ツ}}$、$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを、次の０．～４．のうちから一つずつ選べ。ただし、$\boxed{\text{ツ}}$、$\boxed{\text{テ}}$ の解答の順序は問わない。

０．$P\cap R$　　１．$P\cap S$　　２．$Q\cap R$　　３．$P\cap\overline{Q}$　　４．$R\cap\overline{Q}$

(3) 集合 X が集合 Y の部分集合であるとき、$X\subset Y$ と表す。このとき、次の ０．～４．のうち、部分集合の関係について成り立つものは $\boxed{\textbf{ト}}$、$\boxed{\textbf{ナ}}$ である。
$\boxed{\text{ト}}$、$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを、次の０．～４．のうちから一つずつ選べ。ただし、$\boxed{\text{ト}}$、$\boxed{\text{ナ}}$ の解答の順序は問わない。

０．$P\cup R\subset\overline{Q}$　　１．$S\cap\overline{Q}\subset P$　　２．$\overline{Q}\cap\overline{S}\subset\overline{P}$

３．$\overline{P}\cup\overline{Q}\subset\overline{S}$　　４．$\overline{R}\cap\overline{S}\subset\overline{Q}$

(1) $5 < \sqrt{n} < 6 \Leftrightarrow 25 < n < 36$ より、$U = \{26,\ 27, \cdots, 35\}$ よって U の要素の個数は **10** 個である。

$P,\ Q,\ R,\ S$ の要素を書き出すと以下の通りになる。

$$P = \left\{n \middle| n \in U \text{ かつ } n \text{ は } 4 \text{ の倍数}\right\} = \{28, 32\}$$

$$Q = \left\{n \middle| n \in U \text{ かつ } n \text{ は } 5 \text{ の倍数}\right\} = \{30, 35\}$$

$$R = \left\{n \middle| n \in U \text{ かつ } n \text{ は } 6 \text{ の倍数}\right\} = \{30\}$$

$$S = \left\{n \middle| n \in U \text{ かつ } n \text{ は } 7 \text{ の倍数}\right\} = \{28, 35\}$$

(2) $P \cap R = \phi$, $P \cap S = \{28\}$, $Q \cap R = \{30\}$, $P \cap \overline{Q} = \{28, 32\}$, $R \cap \overline{Q} = \phi$ となるため、空集合であるものは ０． と４． である。

(3) 各選択肢の命題が成り立つか調べていく。

$30 \in P \cup R,\ 30 \notin \overline{Q}$ であるため、$P \cup R \subset \overline{Q}$ は成り立たない。

$S \cap \overline{Q} = \{28\} \subset P$ であるため、$S \cap \overline{Q} \subset P$ は**成り立つ。**

$32 \in \overline{Q} \cap \overline{S},\ 32 \notin \overline{P}$ であるため、$\overline{Q} \cap \overline{S} \subset \overline{P}$ は成り立たない。

$P \cap Q = \phi$ であるため、$S \subset P \cap Q$ は成り立たない。よって両辺の補集合について、$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q} \subset \overline{S}$ も成り立たない。

$Q \subset R \cup S = \{28,\ 30,\ 35\}$ であるため、両辺の補集合について、$\overline{R \cup S} = \overline{R} \cap \overline{S} \subset \overline{Q}$ も**成り立つ。**

以上から部分集合の関係が成り立つものは１．と４．である。