2014年度センター試験　数学1A

第２問

　a を定数とし、x の２次関数

$$y = x^2 + 2\,a\,x + 3\,a^2 - 6\,a - 36 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G の頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}\,a,\ \boxed{\text{イ}}\,a^2 - \boxed{\text{ウ}}\,a - \boxed{\text{エオ}} \right)$$

である。G と y 軸との交点の y 座標を p とする。

(1)　$p = -27$ のとき、a の値は $a = \boxed{\text{カ}}\,,\ \boxed{\text{キク}}$ である。$a = \boxed{\text{カ}}$ のときの ① のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ケ}}$ 、y 軸方向に $\boxed{\text{コ}}$ だけ平行移動すると、$a = \boxed{\text{キク}}$ のときの ① のグラフに一致する。

(2) 下の $\boxed{\text{ス}}$、$\boxed{\text{セ}}$、$\boxed{\text{ノ}}$、$\boxed{\text{ハ}}$ には、次の０．～３．のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

0. ＞　1. ＜　2. ≧　3. ≦

　G が x 軸と共有点を持つような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{\text{サシ}}\ \boxed{\text{ス}}\ a\ \boxed{\text{セ}}\ \boxed{\text{ソ}} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である。a が ② の範囲にあるとき、p は、$a = \boxed{\text{タ}}$ で最小値 $\boxed{\text{チツテ}}$ をとり、$a = \boxed{\text{ト}}$ で最大値 $\boxed{\text{ナニ}}$ をとる。

　G が x 軸と共有点を持ち、さらにそのすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるような a の値の範囲を表す不等式は

$$\boxed{ヌネ}\ \boxed{ノ}\ a\ \boxed{ハ}\ \frac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ヘ}}$$

　である。

$$x^2+2\,ax+3\,a^2-6\,a-36=(x+a)^2+2\,a^2-6\,a-36$$

であるため、G の頂点の座標は

$$(-\,a,\mathbf{2}\,a^2-\mathbf{6}\,a-\mathbf{36})$$

である。

　G と y 軸との交点は $(0,\ 3\,a^2-6\,a-36)$ であるため $p=3\,a^2-6\,a-36$ となる。

⑴ $p=-27$ のとき

$$3\,a^2-6\,a-36=-27\Rightarrow\ 3\,a^2-6\,a-9=0$$
$$\Rightarrow a=\mathbf{3}\,,-\mathbf{1}$$

$a=3$ のときの頂点の座標は $(-3,-36)$
$a=-1$ のときの頂点の座標は $(1,-26)$
　このことから、$a=3$ のときの ① のグラフを x 軸方向に $1-(-3)=\mathbf{4}$ 、y 軸方向に $-28-(-36)=\mathbf{8}$ だけ平行移動すると、$a=-1$ のときの ① のグラフに一致する。

⑵ グラフ G が x 軸と共有点を持つとき、頂点の y 座標は 0 以下でなければならないため、

$$2\,a^2-6\,a-36\leqq 0$$
$$\Rightarrow a^2-3\,a-18=(a-6)(a+3)\leqq 0$$
$$\Rightarrow -\mathbf{3}\leqq a\leqq \mathbf{6}$$

（不等式は順に **3, 3.** が当てはまる）となる。この条件を ② とする。

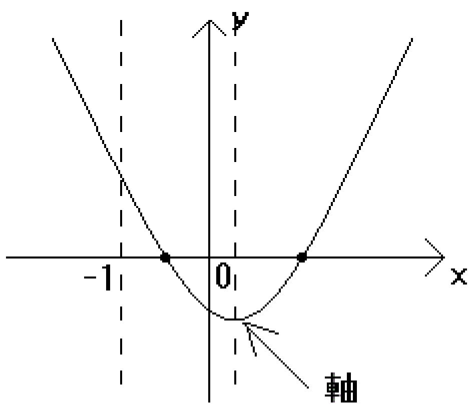
$$p=a^2-6\,a-36=3\,(a-1)^2-39$$

より p の関数としての a の増減表を $-3\leqq a\leqq 6$ の範囲で求めると以下の通りになる。

a	-3		1		6
p	9	減少	-39	増加	36

よって p は $\boldsymbol{a=1}$ で最小値 $\boldsymbol{-39}$ 、$\boldsymbol{a=6}$ で最大値 $\boldsymbol{36}$ をとる。

グラフ G が x 軸と共有点を持ち、それらの x 座標が -1 より大きくなるためには、上の ② の条件の他に以下の２つの条件が必要である。

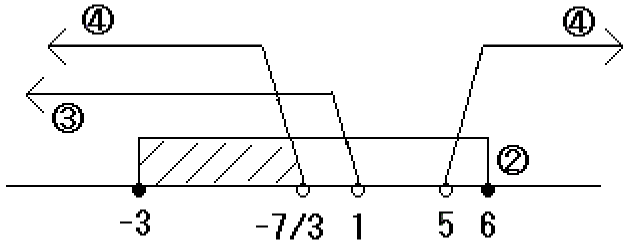


・グラフ G の軸の x 座標が -1 より大きい。$\Leftrightarrow -a>-1 \Leftrightarrow a<1$. この条件を ③ とする。

・$x=-1$ のときの y 座標が正である。

$$\Leftrightarrow 1-2\,a+3\,a^2-6\,a-36>0$$
$$\Leftrightarrow 3\,a^2-8\,a-35=(3\,a+7)(a-5)>0$$
$$\Leftrightarrow a<-\frac{7}{3},\ 5<a$$

この条件を ④ とする。



３個の条件 ②，③，④ の共通部分は

$$\boldsymbol{-3} \leqq a < \frac{\boldsymbol{-7}}{\boldsymbol{3}}$$

である。