

2014 年度センター試験 数学 1A

第 3 問

三角形 ABC は、 $AB = 4, BC = 2, \cos \angle ABC = \frac{1}{4}$ を満たすとする。このとき

$$CA = \boxed{\text{ア}}, \quad \cos \angle BAC = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}, \quad \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

であり、三角形 ABC の外接円 O の半径は $\frac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。 $\angle ABC$ の二等分線と $\angle BAC$ の二等分線の交点を D 、直線 BD と辺 AC の交点を E 、直線 BD と円 O との交点で B と異なる交点を F とする。

(1) このとき

$$AE = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \quad BE = \frac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}}, \quad BD = \frac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

となる。

(2) 三角形 A の面積は三角形 A の面積の $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ 倍である。

(3) 角度に注目すると、線分 FA, FC, FD の関係で正しいのは $\boxed{\text{ネ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ネ}}$ に当てはまるものを、次の 0. ～ 5. のうちから一つ選べ。

$$0. \quad FA < FC = FD$$

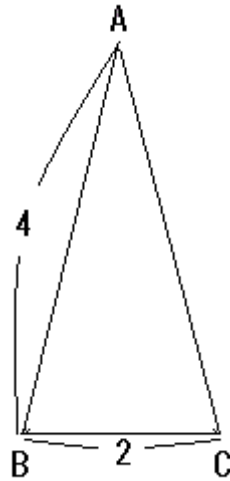
$$1. \quad FA = FC < FD$$

$$2. \quad FC < FA = FD$$

$$3. \quad FD < FC < FA$$

$$4. \quad FA = FC = FD$$

$$5. \quad FD < FC = FA$$



余弦定理より

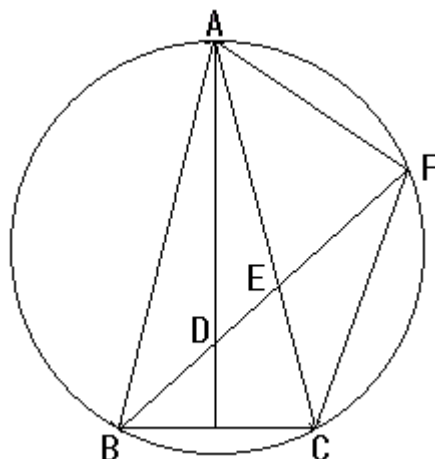
$$\begin{aligned} CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 AB \times BC \cos \angle ABC \\ &= 16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{4} \\ &= 16 \end{aligned}$$

$CA > 0$ より $CA = 4$ 。同じく余弦定理より

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2 \times AB \times CA} = \frac{4^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 4 \times 4} = \frac{7}{8}$$

また

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$



三角形 ABC の外接円 O の半径を R とする。正弦定理より

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2 \times \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15} \Rightarrow R = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

BE は $\angle ABC$ の二等分線であるため

$$AE:EC = AB:BC = 2:1$$

よって $AE = AC \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. 余弦定理より $\angle BAE = \angle BAC$ を使うと

$$\begin{aligned} BE^2 &= AB^2 + AE^2 - 2 AB \times AE \times \cos \angle BAE \\ &= 16 + \frac{64}{9} - 2 \times 4 \times \frac{8}{3} \times \frac{7}{8} \\ &= \frac{40}{9} \end{aligned}$$

$$BE > 0 \text{ より } BE = \sqrt{\frac{40}{9}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

また、 AD は $\angle BAC$ の二等分線であるため

$$BD:DE = BA:AE = 3:2 \Rightarrow BD = BE \times \frac{3}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

三角形 EBC と三角形 EAF は $\angle EBC = \angle EAF$, $\angle BEC = \angle AEF$ より相似である。

$BE = 2\sqrt{10}/3$, $AE = 8/3$ より、三角形 EBC と三角形 EAF の面積比は

$$\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2 : \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{40}{9} : \frac{64}{9} = 5:8$$

となるため、三角形 EBC の面積は三角形 EAF の面積の $\frac{5}{8}$ 倍である。

三角形 EBC と三角形 EAF の相似から AF , EF の長さを求める。

$$AF:BC = AE:BE \Rightarrow AF:2 = 4:\sqrt{10} \Rightarrow AF = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

$$EF:EC = AE:BE \Rightarrow EF:\frac{4}{3} = 4:\sqrt{10} \Rightarrow EF = \frac{16}{3\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{15}$$

このことから

$$BF = BE + EF = \frac{2}{3}\sqrt{10} + \frac{8}{15}\sqrt{10} = \frac{6}{5}\sqrt{10}$$

よって

$$DF = BF - BD = \frac{6}{5}\sqrt{10} - \frac{2}{5}\sqrt{10} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$$

となり、 $FD = FA$ であることがわかる。また円周角 $\angle ABF$ と $\angle CBF$ は等しいため、それぞれの対応する弦 AF と CF も等しい。

以上から FA, FC, FD の関係は ④ $FA = FC = FD$ が成り立つ。