2014 年度センター試験　数学 2

第 1 問

［1］O を原点とする座標平面において、点 $P\,(p, q)$ を中心とする円 C が、方程式 $y = \frac{4}{3}x$ で表される直線 l に接しているとする。

(1)　円 C の半径を求めてみよう。

点 P を通り直線 l に垂直な直線の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}(x - p) + q$$

なので、P から l にひいた直線と l の交点 Q の座標は

$$\left(\frac{3}{25}\left(\boxed{ウ}p + \boxed{エ}\,q\right),\quad \frac{4}{25}\left(\boxed{ウ}p + \boxed{エ}\,q\right)\right)$$

になる。

求める C の半径 r は、P と l の距離 PQ に等しいので、

$$r = \frac{1}{5}\left|\,\boxed{オ}p - \boxed{カ}\,q\right| \cdots\cdots ①$$

である。

(2) 円 C が、x 軸に接し、点 $R(2, 2)$ を通る場合を考える。このとき、$p > 0,\ q > 0$ である。C の方程式を求めよう。

C は x 軸に接するので、C の半径 r は q に等しい。したがって、① により、$p = \boxed{キ}\,q$ である。

C は点 R を通るので、求める C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{ク}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ケ}}\right)^2=\boxed{\text{コ}}\cdots\cdots\cdots②$$

または

$$\left(x-\boxed{\text{サ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{シ}}\right)^2=\boxed{\text{ス}}\cdots\cdots\cdots③$$

であることがわかる。ただし $\boxed{\text{コ}}<\boxed{\text{ス}}$ とする。

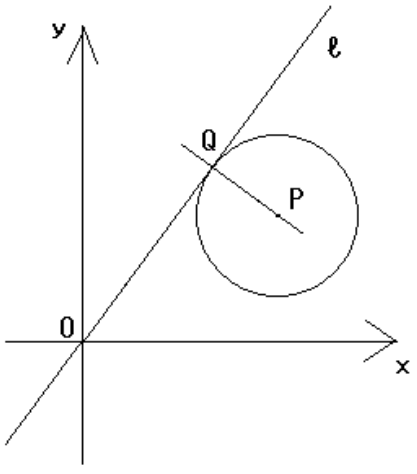
(3) 方程式 ② の表す円の中心をS, 方程式 ③ の表す円の中心を T とおくと、直線 ST は原点 O を通り、点 O は線分 ST を $\boxed{\text{セ}}$ する。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを、次の０．～５．のうちから一つ選べ。

０．$1:1$ に内分　　１．$1:2$ に内分　　２．$2:1$ に内分
３．$1:3$ に外分　　４．$1:2$ に外分　　５．$2:1$ に外分

---

(1) 点 P を通り、l に垂直な直線は傾きが $-\dfrac{3}{4}$ であるため、直線の方程式は

$$y=-\frac{3}{4}(x-p)+q$$



である。P から l にひいた直線と l の交点 Q の x 座標は

$$\frac{4}{3}x=-\frac{3}{4}(x-p)+q \Rightarrow \frac{25}{12}x=\frac{3}{4}p+q$$
$$\Rightarrow x=\frac{12}{25}\left(\frac{3}{4}p+q\right)=\frac{3}{25}\,(3\,p+4\,q)$$

となり、Q の y 座標は

$$y=\frac{4}{3}\times\frac{3}{25}\,(3\,p+4\,q)=\frac{4}{25}\,(3\,p+4\,q)$$

となる。よって点 Q の座標は

$$\left(\frac{3}{25}\,(\mathbf{3}\,p+\mathbf{4}\,q)\,,\frac{4}{25}\,(3\,p+4\,q)\right)$$

となる。

円 C の半径 r は２点 P,Q の距離と等しいため、

$$\begin{aligned}r^2&=\left\{\frac{3}{25}(3p+4q)-p\right\}^2+\left\{\frac{4}{25}(3p+4q)-q\right\}^2\\&=\left\{\frac{1}{25}(-16p+12q)\right\}^2+\left\{\frac{1}{25}(12p-9q)\right\}^2\\&=\frac{1}{25^2}\{-4(4p-3q)\}^2+\frac{1}{25^2}\{3(4p-3q)\}^2\\&=\frac{1}{25}(4p-3q)^2\end{aligned}$$

よって

$$r=\frac{1}{5}|\,\mathbf{4}\,p-\mathbf{3}\,q|\,\cdots\cdots\cdots①$$

⑵ C が x 軸に接し、$R\,(2,2)$ を通るとき、$p>0,\ q>0$ である。C が x 軸に接するとき、C の半径 r は C の中心の y 座標 q に等しい。このため、

$$\frac{1}{5}|4\,p-3\,q|=q \Rightarrow (4\,p-3\,q)^2=25\,q^2$$
$$\Rightarrow 4\,p-3\,q=\pm 5\,q$$
$$\Rightarrow 4\,p=8\,q \text{ or } -2q$$
$$\Rightarrow\ p=2\,q \text{ or } -\frac{1}{2}q$$

$p>0,\ q>0$ より $p=\mathbf{2}\,q$ である。このことから C の式は

$$(x-2\,q)^2+(y-q)^2=q^2$$

となる。この円が $(2,2)$ を通るとき

$$(2-2\,q)^2+(2-q)^2=q^2$$
$$\Rightarrow 4\,q^2-12\,q+8=0$$
$$\Rightarrow q=1,2$$

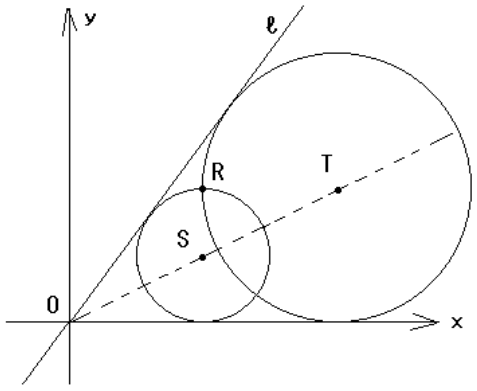
となるため C の式は

$$(x-\mathbf{2})^2+(y-\mathbf{1})^2=\mathbf{1} \cdots\cdots ②$$

または

$$(x-\mathbf{4})^2+(y-\mathbf{2})^2=\mathbf{4} \cdots\cdots ③$$

である。



(3) ②、③ の円の中心をそれぞれ S, T とする。線分 ST は直線 $y = \frac{1}{2}x$ 上にあり、点 O は線分 ST 上にはない。$OT = 2\sqrt{5} = 2\,OS$ より点 O は ST を **$1:2$ に外分する**。

［２］ 自然数 $m,\ n$ に対して、不等式

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leqq 3$$

を考える。

$m = 2,\ n = 1$ のとき、$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 =$ ソ であり、この $m,\ n$ の値の組は ④ を満たす。

$m = 4,\ n = 3$ のとき、$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 =$ タ であり、この $m,\ n$ の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数 $m,\ n$ の組の個数を調べよう。④ は

$$\log_2 m + \frac{\text{チ}}{\text{ツ}} \log_3 n \leqq \text{テ} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

と変形できる。

n が自然数のとき、$\log_3 n$ のとり得る最小の値は ト であるから、⑤ により、$\log_2 m \leqq$ テ でなければならない。$\log_2 m \leqq$ テ により、$m =$ ナ または $m =$ ニ でなければならない。ただし ナ ＜ ニ とする。

$m =$ ナ の場合、⑤ は、$\log_3 n \leqq \frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}$ となり、$n^2 \leqq$ ノハ と変形できる。よって、$m =$ ナ のとき、⑤ を満たす自然数 n のとり得る値の範囲は $n \leqq$ ヒ である。したがって、$m =$ ナ の場合、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は ヒ である。

同様にして、$m =$ ニ の場合、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は フ である。

以上のことから、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は ヘ である。

$m=2,\ n=1$ のとき、

$$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\log_2 8+\log_3 1=3+0=\mathbf{3}\leqq 3$$

であり、この $m,\ n$ の値の組は ④ を満たす。

$m=4,\ n=3$ のとき、

$$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\log_2 64+\log_3 9=6+2=\mathbf{8}>3$$

であり、この $m,\ n$ の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数 $m,\ n$ の組の個数を調べよう。④ を変形すると

$$\log_2 m^3+\log_3 n^2=3\log_2 m+2\ \log_3 n\leqq 3$$
$$\Rightarrow \log_2 m+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\log_3 n\leqq \mathbf{1}\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

となる。

$\log_3 n$ は n に対して増加するため、n が自然数のときの $\log_3 n$ の最小の値は $\log_3 1=\mathbf{0}$ である。よって、

$$\log_2 m\leqq \log_2 m+\frac{2}{3}\log_3 n\leqq 1\Rightarrow \log_2 m=0,1$$

となるため、$m=2^0=\mathbf{1}$ または $m=2^1=\mathbf{2}$ である。

$m=1$ つまり $\log_2 m=0$ のとき、

$$\frac{2}{3}\log_3 n\leqq 1\Rightarrow\ \log_3 n\leqq\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

となる。このとき、

$$\log_3 n^2=\ 2\log_3 n\ \leqq 3\ \Rightarrow n^2\leqq 27$$

$5^2 \leqq 27 \leqq 6^2$ より、⑤ を満たす n の範囲は $n \leqq \mathbf{5}$ となり、$m = 1$ の場合、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は 5 組である。

$m = 2$ つまり $\log_2 m = 1$ のとき、

$$\frac{2}{3}\log_3 n \leqq 0 \Rightarrow \log_3 n = 0 \Rightarrow n = 3^0 = 1$$

よって ④ を満たす自然数 m, n の組の個数は $\mathbf{1}$ 組である。

以上のことから、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は $\mathbf{6}$ である。