

2014 年度センター試験 数学 2

第 2 問

p を実数とし、 $f(x) = x^3 - px$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ が極値を持つための p の条件を求めよう。 $f(x)$ の導関数は $f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^{\boxed{\text{イ}}} - p$ である。したがって、 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば、 $\boxed{\text{ア}} x^{\boxed{\text{イ}}} - p = \boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。さらに、 $x = a$ の前後での $f'(x)$ の符号の変化を考えることにより、 p が条件 $\boxed{\text{エ}}$ を満たす場合は、 $f'(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。 $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを、次の ①～④ のうちから一つ選べ。

- ① $p = 0$ ② $p > 0$ ③ $p \geq 0$ ④ $p < 0$ ⑤ $p \leq 0$

(1) 関数 $f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をとるとする。また、曲線 $y = f(x)$ を C とし、 C 上の点 $\left(\frac{p}{3}, f\left(\frac{p}{3}\right)\right)$ を A とする。

$f(x)$ が x で極値をとることから、 $p = \boxed{\text{オ}}$ である。 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり、 $x = \boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる。

曲線 $y = f(x)$ の接線で、点 A を通り傾きが 0 でないものを ℓ とする。 ℓ の方程式を求めよう。 ℓ と C の接点の x 座標を b とすると、 ℓ は点 $(b, f(b))$ における C の接線であるから、 ℓ の方程式は b を用いて

$$y = \left(\boxed{\text{ケ}} b^2 - \boxed{\text{コ}} \right) (x - b) + f(b)$$

と表すことができる。また、 ℓ は点 A を通るから、方程式

$$\boxed{\text{サ}} b^3 - \boxed{\text{シ}} b^2 + 1 = 0$$

を得る。この方程式を解くと、 $b = \boxed{\text{ス}}$ ， $\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるが、 ℓ の傾きが 0 でないことから、 ℓ の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}} x + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

点 A を頂点とし、原点を通る放物線を D とする。 ℓ と D で囲まれた図形のうち、不等式 $x \leq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう。 D の方程式は

$$y = \boxed{\text{ニ}} x^2 - \boxed{\text{ヌ}} x$$

であるから、定積分を計算すると $S = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる。

(1) $f(x)$ の導関数は $f'(x) = 3x^2 - p$ となる。 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとき、 $f'(a) = 0$ であるため $3a^2 - p = 0$ となる。

また、 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるためには $f'(x)$ が $x = a$ の前後で符号が変わらなければならない。

$p < 0$ のときすべての実数で $3x^2 - p > 0$ であるため、符号は変化しない。

$p = 0$ のときすべての実数で $3x^2 - p \geq 0$ であるため、符号は変化しない。

$p < 0$ のとき導関数 $f'(x) = 3x^2 - p$ は $x = \sqrt{p/3}$ の前後で符号が変化する。

以上から p が条件 ③ $p < 0$ を満たす場合は、 $f'(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。

(2) $f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をもつとき

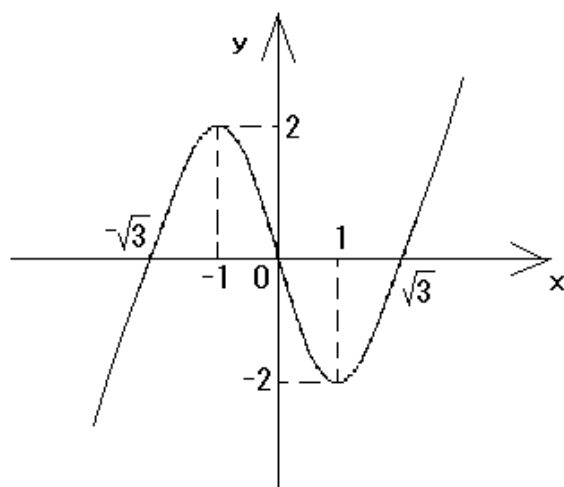
$$f'\left(\frac{p}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{p}{3}\right)^2 - p = \frac{p^2}{3} - p = 0 \Rightarrow p = 0, 3$$

$p > 0$ より $p = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ より極値は $x = -1, 1$ のときである。以上から関数 $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	-1		1	
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	増加		減少	増加

よって $f(x)$ は $x = -1$ で極大値 $f(-1) = 2$ 、 $x = 1$ で極小値 $f(1) = -2$ をとる。



上の計算から点 A の座標は $(1, -2)$ であることがわかる。この点 A を通る C の接線 ℓ で傾きが 0 でないものを求める。接点の x 座標を b とすると、 ℓ の式は

$$y = (3b^2 - 3)(x - b) + f(b)$$

である。 ℓ は $(1, -2)$ を通るため

$$\begin{aligned}
-2 &= (3b^2 - 3)(1 - b) + b^3 - 3b \\
\Rightarrow 2b^3 - 3b^2 + 1 &= 0 \\
\Rightarrow (b - 1)^2(2b + 1) &= 0
\end{aligned}$$

この式から $b = 1, \frac{-1}{2}$ であることがわかる。

$$b = 1 \text{ のとき } \ell \text{ の傾きは } 3 \times 1^2 - 3 = 0$$

$$b = -\frac{1}{2} \text{ のとき } \ell \text{ の傾きは } 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = -\frac{9}{4}$$

ℓ の傾きは 0 ではないため、接点の x 座標 b は $-\frac{1}{2}$ であることがわかる。

また

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{8}$$

より接線 ℓ の式は

$$y = -\frac{9}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{8} = \frac{-9}{4}x + \frac{1}{4}$$

である。

点 $A(1, -2)$ を頂点とする放物線 D の式は

$$y = a(x - 1)^2 - 2$$

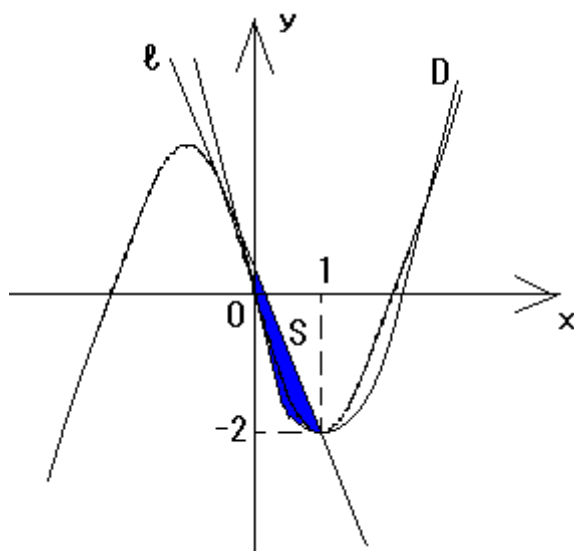
(a : 実数) と表される。この放物線が原点を通るとき、

$$0 = a(0 - 1)^2 - 2 \Rightarrow a = 2$$

となるため、放物線 D の式は

$$y = 2(x - 1)^2 - 2 = 2x^2 - 4x$$

である。



l と D で囲まれる部分では l が上にあるため $x \geq 0$ での部分の面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{9}{4}x + \frac{1}{4} \right) - (2x^2 - 4x) \right\} dx \\
 &= \int_0^1 \left(-2x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{4} \right) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{1}{4}x \right]_0^1 \\
 &= \frac{11}{24}
 \end{aligned}$$