

2014 年度センター試験 数学 2

第 3 問

関数 $y = \sin x - \cos 2x$ のグラフについて考えよう。ただし、 $0 \leq x \leq 2\pi$ とする。

- (1) まず、 $y = \sin x - \cos 2x > 0$ となる x の範囲を求めよう。
三角関数の 2 倍角の公式を利用すれば

$$\begin{aligned}\sin x - \cos 2x &= \boxed{\text{ア}} \sin^2 x + \sin x - \boxed{\text{イ}} \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ &= (\boxed{\text{ア}} \sin x - \boxed{\text{ウ}})(\sin x + \boxed{\text{エ}})\end{aligned}$$

である。よって、 $0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $\sin x - \cos 2x = 0$ となる x の値は小さい順に $\frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ 、 $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ 、 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ であることがわかる。また、 $y = \sin x - \cos 2x > 0$ となる x の範囲は、 $\boxed{\text{コ}}$ である。 $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを、次の ①～③のうちから一つ選べ。

① $0 < x < \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$

① $\frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}} < x < \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$

② $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi < x < \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$

③ $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi < x < 2\pi$

- (2) 次に、 $y = \sin x - \cos 2x$ の最大値と最小値を求めよう。
① から

$$\sin x - \cos 2x = \boxed{\text{ア}} \left(\sin x + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right)^2 - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

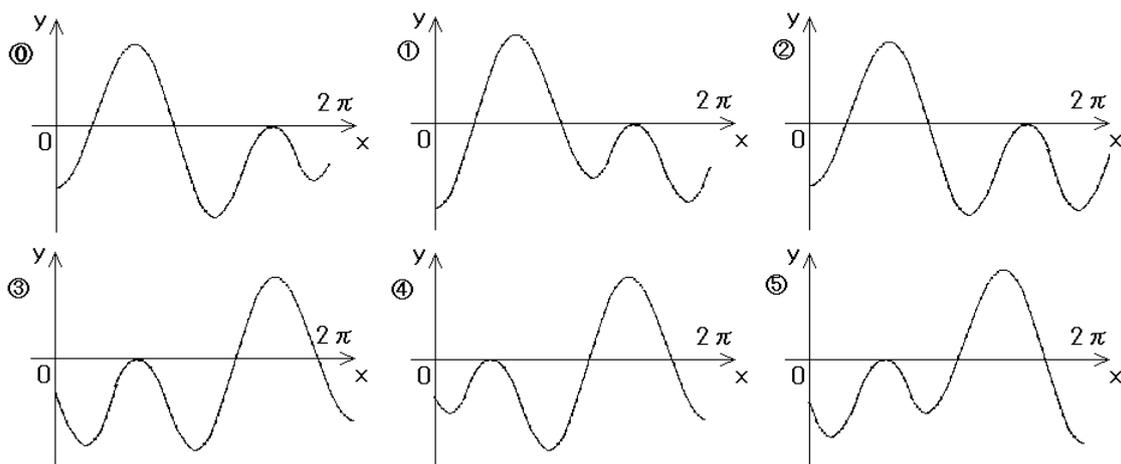
である。

よって、② から、 $y = \sin x - \cos 2x$ は、 $x = \boxed{\text{ソ}}$ において最大値 $\boxed{\text{タ}}$ をとり、 $x = \boxed{\text{チ}}$ 、 $\boxed{\text{ツ}}$ において最小値 $\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとることがわかる。ただし $\boxed{\text{ソ}}$ 、 $\boxed{\text{チ}}$ 、 $\boxed{\text{ツ}}$ については、当てはまるものを、次の ①～⑨ のうちから一つずつ選べ。 $\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ は解答の順序を問わない。

- ① α ① $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ④ $\pi - \alpha$
 ⑤ $\pi + \alpha$ ⑥ $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ ⑦ $\frac{3}{2}\pi$ ⑧ $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ ⑨ $2\pi - \alpha$

ここで、 α は、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $\sin \alpha = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ を満たすものとする。

(3) 以上のことから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における関数 $y = \sin x - \cos 2x$ のグラフの概形として適切なものは $\boxed{\text{ニ}}$ であることがわかる。 $\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。



(1) 三角関数の2倍角の公式を利用すると

$$\begin{aligned}\sin x - \cos 2x &= \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) \\ &= 2 \sin^2 x + \sin x - 1 \dots \dots \dots \textcircled{1} \\ &= (2 \sin x - 1) (\sin x + 1)\end{aligned}$$

となる。よって $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $\sin x - \cos 2x = 0$ となるとき $\sin x = \frac{1}{2}$, -1 より

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

また、

$$\begin{aligned}\sin x - \cos 2x &= (2 \sin x - 1) (\sin x + 1) > 0 \\ \Rightarrow \sin x < -1, \quad \sin x > \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ここで $-1 \leq \sin x \leq 1$ より、 $\sin x - \cos 2x > 0$ に適する x の範囲は

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

よって

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$$

() に当てはまる選択肢は (1) となる。

(2) $y = \sin x - \cos 2x$ の大値と最小値を求める。① を変形すると

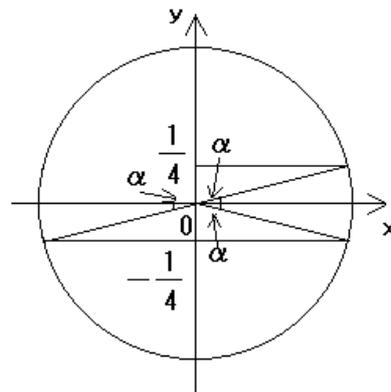
$$\begin{aligned}\sin x - \cos 2x &= 2 \sin^2 x + \sin x - 1 \\ &= 2 \left(\sin x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{8}\end{aligned}$$

この式から、 $-1 \leq \sin x \leq 1$ の範囲における関数 $y = \sin x - \cos 2x$ の増減表は以下の通りである。

| | | | | | |
|----------|----|----|----------------|----|---|
| $\sin x$ | -1 | | $-\frac{1}{4}$ | | 1 |
| y | 0 | 減少 | $-\frac{9}{8}$ | 増加 | 2 |

よって関数 $y = \sin x - \cos 2x$ の最大値は $\sin x = 1$ つまり $x = \frac{\pi}{2}$ (ツ) に当てはまる選択肢は ②) のときの 2、最小値は $\sin x = -\frac{1}{4}$ のときの $-\frac{9}{8}$ である。

α は $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ を満たすことから、 $\sin x = -\frac{1}{4}$ を満たす x は $x = \pi + \alpha, 2\pi - \alpha$ の 2 個である (チ ツ) に当てはまる選択肢は ⑤, ⑨)



$\sin \alpha = \frac{1}{4}$ となる α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるため、 $\pi < \pi + \alpha, 2\pi - \alpha < 2\pi$ となる。グラフの選択肢の中で $\pi < x < 2\pi$ の範囲で最小値を 2 個含むものは ② のみである。