

2014 年度センター試験 数学 2

第 4 問

c, d を実数とし、 x についての 3 次式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + c x^2 + d x + 2$$

で定める。 $P(x)$ は、 $P(-1) = 0$, $P(2) < -2$ を満たし、3 以上の自然数 n に対しては $P(n) \geq 0$ であるとする。

$P(-1) = 0$ により

$$d = c + \boxed{\text{ア}}$$

となり、 $P(x)$ は c を用いて

$$P(x) = (x + 1) \left\{ x^2 + \left(\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}} \right) x + \boxed{\text{エ}} \right\} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

と因数分解される。① を用いて、 $P(2) < -2$ を c について解くと

$$c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる。

また、 n を 3 以上の自然数とするとき、不等式 $P(n) \geq 0$ を c について解くと

$$c \geq -\frac{\boxed{\text{キ}}}{n} + \boxed{\text{ク}} - n \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

となる。 $n \geq 3$ のとき、 n の値が大きくなると、③ の右辺の値は小さくなる。
したがって、② と ③ により、 c のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \leq c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

となる。

3次関数 $y = P(x)$ のグラフを考えると、 $P(0) = 2 > 0$ かつ $P(2) < 0$ であるから、方程式 $P(x) = 0$ は 0 と 2 の間に実数解 α をもつ。 α のとり得る値の範囲を求めてみよう。

① により、この α は、2次方程式

$$x^2 + (\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}})x + \boxed{\text{エ}} = 0$$

の解である。この方程式の他の解を β とすると、解の係数の関係により、 $\alpha + \beta$ は c を用いて、

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}}$$

と表される。したがって ④ により

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < \alpha + \beta \leq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

が得られる。解と係数の関係により、 $\alpha\beta = \boxed{\text{テ}}$ であり、また、 $\alpha > 0$ であるから、⑤ は

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \alpha < \alpha^2 + \boxed{\text{テ}} \leq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

と変形できる。この不等式を α について解いて、 $0 < \alpha < 2$ に注意すると、 α のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leq \alpha < \frac{\boxed{\text{二}} - \sqrt{\boxed{\text{又}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

であることがわかる。

$P(-1) = 0$ により

$$\begin{aligned} (-1)^3 + c \times (-1)^2 + d \times (-1) + 2 &= c - d + 1 = 0 \\ \Rightarrow d &= c + 1 \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + c x^2 + (c + 1) x + 2 \\ &= (x + 1) \{x^2 + (c - 1) x + 2\} \end{aligned}$$

と因数分解される。 $P(2) < -2$ より

$$\begin{aligned} 3 \times \{4 + 2(c - 1) + 2\} &= 3(2c + 4) < -2 \\ \Rightarrow c &< \frac{-7}{3} \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

また、 n を 3 以上の自然数とするとき、不等式 $P(n) = (n + 1) \{n^2 + (c - 1)n + 2\} \geq 0$ である。 $n, n + 1 > 0$ より、

$$\begin{aligned} n^2 + (c - 1)n + 2 &\geq 0 \Rightarrow c n \geq -2 + n - n^2 \\ \Rightarrow c &\geq -\frac{2}{n} + 1 - n \dots\dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$n \geq 3$ の範囲で n が増加すると $-\frac{2}{n} + 1 - n$ は減少する。したがって、

$$c \geq -\frac{2}{3} + 1 - 3 = \frac{-8}{3}$$

この式と ② から c のとり得る値の範囲は

$$-\frac{8}{3} \leq c < -\frac{7}{3} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

方程式 $P(x) = 0$ は 0 と 2 の間に実数解 α をもつ。 α のとり得る値の範囲を求めてみよう。

① により、 x は方程式 $P(x) = 0$ の一つの解である。したがって、この α は、2 次方程式

$$x^2 + (c - 1)x + 2 = 0$$

の解である。この方程式の他の解を β とすると、解の係数の関係により、 $\alpha + \beta$ は c を用いて、

$$\alpha + \beta = 1 - c$$

と表される。④ から

$$1 - \left(-\frac{7}{3}\right) < \alpha + \beta \leq 1 - \left(-\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \frac{10}{3} < \alpha + \beta \leq \frac{11}{3} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

である。解の係数の関係により $\alpha\beta = 2$ であり、また、 $\alpha > 0$ であるから、⑤ は

$$\frac{10}{3}\alpha < \alpha^2 + \alpha\beta = \alpha^2 + 2 \leq \frac{11}{3}\alpha$$

と変形できる。この式を2つの2次不等式に分けて α について解いていく。

$$\begin{aligned} \frac{10}{3}\alpha < \alpha^2 + 2 &\Rightarrow 3\alpha^2 - 10\alpha + 6 > 0 \\ &\Rightarrow \alpha < \frac{5 - \sqrt{7}}{3}, \quad \frac{5 + \sqrt{7}}{3} < \alpha \end{aligned}$$

$0 < \alpha < 2$ であることから、 $\frac{5 + \sqrt{7}}{3} < \alpha$ は不適である。

$$\alpha^2 + 2 \leq \frac{11}{3}\alpha \Rightarrow 3\alpha^2 - 11\alpha + 6 = (3\alpha - 2)(\alpha - 3) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq \alpha \leq 3$$

この範囲と上の $\alpha < \frac{5-\sqrt{7}}{3}$ の範囲との共通部分は

$$\frac{2}{3} \leq \alpha < \frac{5-\sqrt{7}}{3}$$

この範囲は $0 < \alpha < 2$ に含まれるため、求める α の値の範囲であることがわかる。