

2014 年度センター試験 数学 2 B

第 1 問

[1] O を原点とする座標平面において、点 $P(p, q)$ を中心とする円 C が、方程式 $y = \frac{4}{3}x$ で表される直線 l に接しているとする。

- (1) 円 C の半径を求めてみよう。
点 P を通り直線 l に垂直な直線の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(x - p) + q$$

なので、 P から l にひいた直線と l の交点 Q の座標は

$$\left(\frac{3}{25}(\boxed{\text{ウ}}p + \boxed{\text{エ}}q), \quad \frac{4}{25}(\boxed{\text{ウ}}p + \boxed{\text{エ}}q) \right)$$

になる。

求める C の半径 r は、 P と l の距離 PQ に等しいので、

$$r = \frac{1}{5} \left| \boxed{\text{オ}}p - \boxed{\text{カ}}q \right| \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。

- (2) 円 C が、 x 軸に接し、点 $R(2, 2)$ を通る場合を考える。このとき、 $p > 0, q > 0$ である。 C の方程式を求めよう。

C は x 軸に接するので、 C の半径 r は q に等しい。したがって、 $\textcircled{1}$ により、 $p = \boxed{\text{キ}}q$ である。

C は点 R を通るので、求める C の方程式は

$$(x - \boxed{\text{ク}})^2 + (y - \boxed{\text{ケ}})^2 = \boxed{\text{コ}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

または

$$(x - \boxed{\text{サ}})^2 + (y - \boxed{\text{シ}})^2 = \boxed{\text{ス}} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

であることがわかる。ただし $\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{ス}}$ とする。

(3) 方程式 ② の表す円の中心を S 、方程式 ③ の表す円の中心を T とおくと、直線 ST は原点 O を通り、点 O は線分 ST を $\boxed{\text{セ}}$ する。 $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを、次の 0. ～ 5. のうちから一つ選べ。

0. 1:1 に内分

1. 1:2 に内分

2. 2:1 に内分

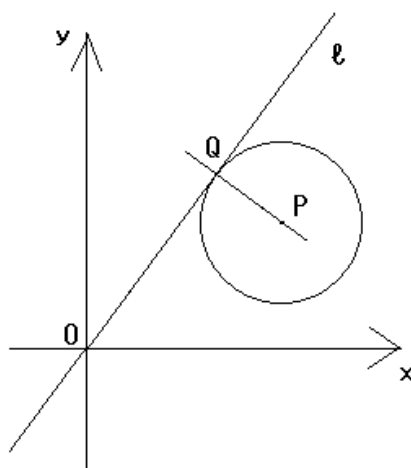
3. 1:3 に外分

4. 1:2 に外分

5. 2:1 に外分

(1) 点 P を通り、 l に垂直な直線は傾きが $-\frac{3}{4}$ であるため、直線の方程式は

$$y = -\frac{3}{4}(x - p) + q$$



である。 P から l にひいた直線と l の交点 Q の x 座標は

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}x &= -\frac{3}{4}(x-p) + q \Rightarrow \frac{25}{12}x = \frac{3}{4}p + q \\ \Rightarrow x &= \frac{12}{25} \left(\frac{3}{4}p + q \right) = \frac{3}{25} (3p + 4q)\end{aligned}$$

となり、 Q の y 座標は

$$y = \frac{4}{3} \times \frac{3}{25} (3p + 4q) = \frac{4}{25} (3p + 4q)$$

となる。よって点 Q の座標は

$$\left(\frac{3}{25} (3p + 4q), \frac{4}{25} (3p + 4q) \right)$$

となる。

円 C の半径 r は 2 点 P, Q の距離と等しいため、

$$\begin{aligned}r^2 &= \left\{ \frac{3}{25} (3p + 4q) - p \right\}^2 + \left\{ \frac{4}{25} (3p + 4q) - q \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{25} (-16p + 12q) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{25} (12p - 9q) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{25^2} \{-4(4p - 3q)\}^2 + \frac{1}{25^2} \{3(4p - 3q)\}^2 \\ &= \frac{1}{25} (4p - 3q)^2\end{aligned}$$

よって

$$r = \frac{1}{5} |4p - 3q| \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

(2) C が x 軸に接し、 $R(2, 2)$ を通るとき、 $p > 0$, $q > 0$ である。 C が x 軸に接するとき、 C の半径 r は C の中心の y 座標 q に等しい。このため、

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}|4p - 3q| &= q \Rightarrow (4p - 3q)^2 = 25q^2 \\ &\Rightarrow 4p - 3q = \pm 5q \\ &\Rightarrow 4p = 8q \text{ or } -2q \\ &\Rightarrow p = 2q \text{ or } -\frac{1}{2}q\end{aligned}$$

$p > 0, q > 0$ より $p = 2q$ である。このことから C の式は

$$(x - 2q)^2 + (y - q)^2 = q^2$$

となる。この円が $(2, 2)$ を通るとき

$$\begin{aligned}(2 - 2q)^2 + (2 - q)^2 &= q^2 \\ \Rightarrow 4q^2 - 12q + 8 &= 0 \\ \Rightarrow q &= 1, 2\end{aligned}$$

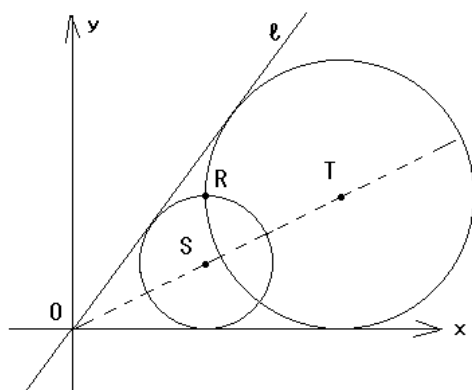
となるため C の式は

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

または

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

である。



(3) ②、③ の円の中心をそれぞれ S, T とする。線分 ST は直線 $y = \frac{1}{2}x$ 上にあり、点 O は線分 ST 上にはない。 $OT = 2\sqrt{5} = 2 OS$ より点 O は ST を **1:2** に外分する。

[2] 自然数 m, n に対して、不等式

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3$$

を考える。

$m = 2, n = 1$ のとき、 $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{ソ}}$ であり、この m, n の値の組は ④ を満たす。

$m = 4, n = 3$ のとき、 $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{タ}}$ であり、この m, n の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数 m, n の組の個数を調べよう。④ は

$$\log_2 m + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \log_3 n \leq \boxed{\text{テ}} \dots \dots \dots \text{⑤}$$

と変形できる。

n が自然数のとき、 $\log_3 n$ のとり得る最小の値は $\boxed{\text{ト}}$ であるから、⑤ により、 $\log_2 m \leq \boxed{\text{テ}}$ でなければならない。 $\log_2 m \leq \boxed{\text{テ}}$ により、 $m = \boxed{\text{ナ}}$ または $m = \boxed{\text{ニ}}$ でなければならない。ただし $\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

$m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合、⑤ は、 $\log_3 n \leq \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ となり、 $n^2 \leq \boxed{\text{ノハ}}$ と変形できる。よ

って、 $m = \boxed{\text{ナ}}$ のとき、⑤ を満たす自然数 n のとり得る値の範囲は $n \leq \boxed{\text{ヒ}}$ である。したがって、 $m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

同様にして、 $m = \boxed{\text{ニ}}$ の場合、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{フ}}$ である。

以上のことから、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

$m = 2, n = 1$ のとき、

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \log_2 8 + \log_3 1 = 3 + 0 = \mathbf{3} \leq 3$$

であり、この m, n の値の組は ④ を満たす。

$m = 4, n = 3$ のとき、

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \log_2 64 + \log_3 9 = 6 + 2 = \mathbf{8} > 3$$

であり、この m, n の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数 m, n の組の個数を調べよう。④ を変形すると

$$\begin{aligned} \log_2 m^3 + \log_3 n^2 &= 3 \log_2 m + 2 \log_3 n \leq 3 \\ \Rightarrow \log_2 m + \frac{2}{3} \log_3 n &\leq \mathbf{1} \dots \dots \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。

$\log_3 n$ は n に対して増加するため、 n が自然数のときの $\log_3 n$ の最小の値は $\log_3 1 = \mathbf{0}$ である。よって、

$$\log_2 m \leq \log_2 m + \frac{2}{3} \log_3 n \leq 1 \Rightarrow \log_2 m = 0, 1$$

となるため、 $m = 2^0 = \mathbf{1}$ または $m = 2^1 = \mathbf{2}$ である。

$m = 1$ つまり $\log_2 m = 0$ のとき、

$$\frac{2}{3} \log_3 n \leq 1 \Rightarrow \log_3 n \leq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

となる。このとき、

$$\log_3 n^2 = 2 \log_3 n \leq 3 \Rightarrow n^2 \leq 27$$

$5^2 \leq 27 \leq 6^2$ より、⑤ を満たす n の範囲は $n \leq 5$ となり、 $m = 1$ の場合、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は 5 組である。

$m = 2$ つまり $\log_2 m = 1$ のとき、

$$\frac{2}{3} \log_3 n \leq 0 \Rightarrow \log_3 n = 0 \Rightarrow n = 3^0 = 1$$

よって ④ を満たす自然数 m, n の組の個数は 1 組である。

以上のことから、④ を満たす自然数 m, n の組の個数は 6 である。