

2014 年度センター試験 数学 2 B

第 3 問

数列 $\{a_n\}$ の初項は 6 であり、 $\{a_n\}$ の階差数列は初項が 9、公差が 4 の等差数列である。

- (1) $a_2 = \boxed{\text{アイ}}$ 、 $a_3 = \boxed{\text{ウエ}}$ である。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は $\boxed{\text{オ}}n + \boxed{\text{カ}}$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{キ}}n^{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{ケ}}n + \boxed{\text{コ}} \dots\dots \textcircled{1}$$

である。

- (2) 数列 $\{b_n\}$ は、初項が $\frac{2}{5}$ で、漸化式

$$b_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1} - 1} b_n \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \dots\dots \textcircled{2}$$

を満たすとする。 $b_2 = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。数列 $\{b_n\}$ の一般項と初項から第 n 項

までの和 S_n を求めよう。

①、② により、すべての自然数 n に対して

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{タ}}} b_n \dots\dots \textcircled{3}$$

が成り立つことがわかる。

ここで

$$c_n = \left(\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{ソ}} \right) b_n \dots\dots \textcircled{4}$$

とするとき、③ を c_n と c_{n+1} を用いて変形すると、すべての自然数 n に対して

$$\left(\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{チ}}\right) c_{n+1} = \left(\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{ツ}}\right) c_n$$

が成り立つことがわかる。これにより

$$d_n = \left(\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{テ}}\right) c_n \cdots \cdots \textcircled{5}$$

とおくと、すべての自然数 n に対して $d_{n+1} = d_n$ が成り立つことがわかる。

$d_1 = \boxed{\text{ト}}$ であるから、すべての自然数 n に対して $d_n = \boxed{\text{ト}}$ である。したがって、④ と ⑤ により、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\left(\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{ソ}}\right)\left(\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{テ}}\right)}$$

である。また

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{ソ}}} - \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{セ}}n + \boxed{\text{テ}}}$$

が成り立つことを利用すると、数列 $\{b_n\}$ の一般項と初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{\boxed{\text{ヌ}}n}{\boxed{\text{ネ}}n + \boxed{\text{ノ}}}$$

であることがわかる。

階差数列の初項は 9、第 2 項は $9 + 4 = 13$ であるため、

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + 9 = \mathbf{15} \\a_3 &= a_2 + 13 = \mathbf{28}\end{aligned}$$

階差数列の第 n 項は

$$9 + 4 \times (n - 1) = \mathbf{4n + 5}$$

であるため、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}a_n &= 6 + \sum_{i=1}^{n-1} (4i + 5) \\&= 6 + 4 \times \frac{n(n-1)}{2} + 5 \times (n-1) \\&= 6 + 2n^2 - 2n + 5n - 5 \\&= \mathbf{2n^2 + 3n + 1} \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の漸化式 ② に $n = 2$ を代入すると

$$b_2 = \frac{a_1}{a_2 - 1} b_1 = \frac{6}{15 - 1} \times \frac{2}{5} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{35}}$$

$a_n = 2n^2 + 3n + 1$, $a_{n+1} = 2n^2 + 7n + 6$ を ② に代入すると

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 + 7n + 5} b_n \\&= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+5)(n+1)} b_n \\&= \frac{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2n+5}} b_n\end{aligned}$$

ここで $c_n = (2n+1)b_n$ とする。上の式より

$$\begin{aligned}
(2n+3)b_{n+1} &= (2n+3)\frac{2n+1}{2n+5}b_n \\
\Rightarrow c_{n+1} &= \frac{2n+3}{2n+5}c_n \\
\Rightarrow (2n+5)c_{n+1} &= (2n+3)c_n
\end{aligned}$$

が成り立つ。さらに

$$d_n = (2n+3)c_n$$

とおくと $d_{n+1} = d_n$ が成り立つ。

$$d_1 = 5 \times c_1 = 5 \times 3 \times b_1 = 5 \times 3 \times \frac{2}{5} = 6$$

であることから、すべての自然数 n に対して $d_n = 6$ であることがわかる。
したがって、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めると

$$c_n = \frac{6}{2n+3} \Rightarrow b_n = \frac{6}{(2n+1)(2n+3)}$$

となる。また

$$b_n = \frac{3\{(2n+3) - (2n+1)\}}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{3}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}$$

が成り立つことから、 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めると

$$\begin{aligned}
S_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n \\
&= \left(\frac{3}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{2n-1} - \frac{3}{2n+1}\right) \\
&\quad + \left(\frac{3}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}\right) \\
&= 1 - \frac{3}{2n+3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2n}{2n+3}$$

となる。