

2014 年度センター試験 数学 2 B

第 4 問

座標空間において、立方体 $OABC - DEFG$ の頂点を

$$\begin{array}{llll} O(0, 0, 0), & A(3, 0, 0), & B(3, 3, 0), & C(0, 3, 0) \\ D(0, 0, 3), & E(3, 0, 3), & F(3, 3, 3), & G(0, 3, 3) \end{array}$$

とし、 OD を $2:1$ に内分する点を K 、 OA を $1:2$ に内分する点を L とする。 BF 上の点 M 、 FG 上の点 N および K, L の 4 点は同一平面上にあり、四角形 $KLMN$ は平行四辺形であるとする。

(1) 四角形 $KLMN$ の面積を求めよう。ベクトル $\overrightarrow{LK}$ を成分で表すと

$$\overrightarrow{LK} = (\boxed{\text{アイ}}, \boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$$

となり、四角形 $KLMN$ が平行四辺形であることにより、 $\overrightarrow{LK} = \boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを、次の ① ～ ③ のうちから一つ選べ。

$$\textcircled{0} \overrightarrow{ML} \quad \textcircled{1} \overrightarrow{LM} \quad \textcircled{2} \overrightarrow{NM} \quad \textcircled{3} \overrightarrow{MN}$$

ここで、 $M(3, 3, s)$ 、 $N(t, 3, 3)$ と表すと $\overrightarrow{LK} = \boxed{\text{オ}}$ であるので、

$s = \boxed{\text{カ}}$ 、 $t = \boxed{\text{キ}}$ となり、 N は FG を $1:\boxed{\text{ク}}$ に内分することがわかる。

また、 $\overrightarrow{LK}$ と $\overrightarrow{LM}$ について、

$$\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{LM} = \boxed{\text{ケ}}, \quad |\overrightarrow{LK}| = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}, \quad |\overrightarrow{LM}| = \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$$

となるので、四角形 $KLMN$ の面積は $\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

(2) 四角形 $KLMN$ を含む平面を α とし、点 O を通り平面 α と垂直に交わる直線を ℓ 、 α と ℓ の交点を P とする。 $|\overrightarrow{OP}|$ と三角錐 $OLMN$ の体積を求めよう。

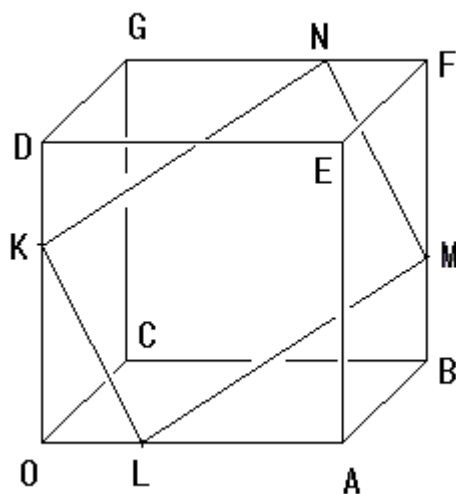
$P(p, q, r)$ とおくと、 $\overrightarrow{OP}$ は $\overrightarrow{LK}$ および $\overrightarrow{LM}$ と垂直であるから、

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LM} = \boxed{\text{ソ}}$ となるので、 $p = \boxed{\text{タ}}r$, $q = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}r$ であること

がわかる。 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{PL}$ が垂直であることにより $r = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ となり、 $|\overrightarrow{OP}|$ を求めると

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$$

である。 $|\overrightarrow{OP}|$ は三角形 LMN を底面とする三角錐 $OLMN$ の高さであるから、三角錐 $OLMN$ の体積は $\boxed{\text{フ}}$ である。



K は OD を $2:1$ に内分する点。 L は OA を $1:2$ に内分する点であるため K, L の座標は

$$K : \frac{2}{3} \times (0, 0, 3) = (0, 0, 2), \quad L : \frac{1}{3} \times (3, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

である。よって、

$$\overrightarrow{LK} = (0, 0, 2) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 2)$$

四角形 $KLMN$ は平行四辺形であるため、 $\overrightarrow{LK}$ と $\overrightarrow{MN}$ は同じ方向に平行で、長さが等しい、よって $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MN}$ である。(**オ**) には ③ が当てはまる)

$M(3, 3, s), N(t, 3, 3)$ と表すと $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MN}$ であるので、

$$(-1, 0, 2) = (t - 3, 0, 3 - s) \Rightarrow s = 1, \quad t = 2$$

であることがわかる。

$GN = 2, NF = 1$ となるため、 N は FG を $1:2$ に内分する。

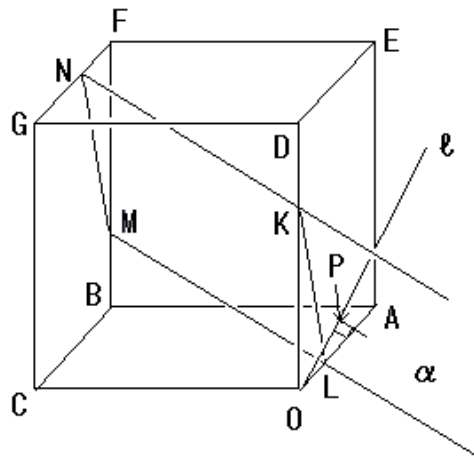
また $\overrightarrow{LM} = (3, 3, 1) - (1, 0, 0) = (2, 3, 1)$ より

$$\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{LM} = (-1) \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 1 = 0$$

$$|\overrightarrow{LK}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{LM}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

つまり四角形 $KLMN$ は長方形となるため面積は $\sqrt{5} \times \sqrt{14} = \sqrt{70}$.



(2) $\overrightarrow{OP}$ は $\overrightarrow{LK}$ および $\overrightarrow{LM}$ と垂直であるから、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LM} = 0$ と

なる。 $\overrightarrow{OP} = (p, q, r)$ と $\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{LM}$ との内積を計算する。

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LK} = -p + 2r = 0 \Rightarrow p = 2r$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LM} = 2p + 3q + r = 3q + 5r = 0 \Rightarrow q = -\frac{5}{3}r$$

また $\overrightarrow{PL} = (1 - p, -q, -r)$ は $\overrightarrow{OP}$ と垂直であることから、

$$\overrightarrow{PL} \cdot \overrightarrow{OP} = p(1 - p) - q^2 - r^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2r(1-2r) - \frac{25}{9}r^2 - r^2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{70}{9}r^2 + 2r = 0$$

$$\Rightarrow r = 0, \frac{9}{35}$$

$r = 0$ のときは $P = O$ となるため不適。よって $r = \frac{9}{35}$

以上から $|\overrightarrow{OP}|$ を計算すると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \\ &= r \sqrt{2^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 1^2} \\ &= \frac{9}{35} \times \frac{\sqrt{70}}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{70}}{35} \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{OP}|$ は三角形 LMN を底面とする三角錐 $OLMN$ の高さである。また、三角形 LMN の面積は四角形 $KLMN$ の半分である。以上から、三角錐 $OLMN$ の体積を求めると

$$\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{70}}{35} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{70} = 1$$

となる。