2014年度センター試験　数学２B

第６問

　2 以上の自然数 N に対して、1 から N までの自然数の積

$$N\,! = 1 \times 2 \times \cdots \times N$$

の素因数分解を考える。

(1) $N = 6$ のとき、$N\,!$ の素因数分解は $6\,! = 2^{\boxed{ア}} \times 3^{\boxed{イ}} \times 5$ である。$6\,!$ は素因数 2 を $\boxed{ア}$ 個、素因数 3 を $\boxed{イ}$ 個、素因数 5 を 1 個もつ。

(2) $N\,!$ がもつ素因数 2 の個数を求める方法について考えよう。

　まず、$\dfrac{N}{2}$ の整数部分を M とおく。N 以下の自然数の中には、M 個の偶数 $2,\ 4,\ \cdots,\ 2M$ がある。その他の奇数の積を Q とおくと、$N\,!$ は次のように表すことができる。

$$N\,! = Q \times 2 \times 4 \times \cdots \times 2M = Q \times 2^M \times M\,!$$

したがって、$N\,!$ は少なくとも M 個の素因数 2 をもつことがわかる。さらに、$M\,!$ がもつ素因数 2 の個数を求めるために、$N\,!$ に対する手順を $M\,!$ に対して再び用いることができる。

　つまり、$N\,!$ がもつ素因数 2 の個数を求めるためには、N から $\dfrac{N}{2}$ の整数部分である M を求め、M を改めて N と考えて、同じ手順を用いて新しく M を求める、という手順の繰り返しを $M < 2$ となるまで行えばよい。この手順を繰り返しで求められたすべての M の和が、$N\,!$ がもつ素因数 2 の個数である。

　たとえば、$N = 13$　の場合には、$\dfrac{13}{2} = 6.5$ であるから、$M = 6$ となる。この手順を繰り返して M を求めた結果は、N から M を求める手順を矢印(→)で表すと、次のようにまとめられる。

$$13 \to \mathbf{6} \to \mathbf{3} \to \mathbf{1}$$

太字で表された $6,\ 3,\ 1$ が、この手順を繰り返して求められた M の値である。それらの和 $6+3+1=10$ が、$13!$ のもつ素因数 2 の個数である。

　この手順にしたがって、2 以上の自然数 N を入力して、$N!$ がもつ素因数 2 の個数を出力する［プログラム１］を作成した。ただし、INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である。

［プログラム１］

```
100  INPUT PROMPT “N=”: N
110  LET D=2
120  LET C=0
130  LET M=N
140  FOR J=1 TO N
150      LET M=INT(M/D)
160      LET ウ
170      IF エ THEN GOTO 190
180  NEXT J
190  PRINT “素因数”; D; “は”; C; “個”
200  END
```

　［プログラム１］の $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを、次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ C=C+1　① C=M　② C=C+M　③ C=C+M+1

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを、次の ⓪ ～ ④ のうちから一つ選べ。

⓪ M>=0　① M=D　② M<=D　③ M<D　④ M>D

　［プログラム１］を実行し、変数 N に 101 を入力する。170 行の「GOTO 190」が実行されるときの変数 J の値は $\boxed{\text{オ}}$ である。また、190 行で出力される変数 C の値は $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(3) $N!$ が持つ素因数 2 の個数を求める方法は、他の素因数の個数についても同様に適用できる。たとえば、$N!$ が持つ素因数 5 の個数を求める場合は、まず、$\dfrac{N}{5}$ の整数部分を M とおく。N 以下の自然数の中には M 個の 5 の倍数があるので、$N!$ は少なくとも M 個の素因数 5 を持つ。また、これらのM 個の 5 の倍数を 5 で割った商は 1, 2,$\cdots$, M である。$M!$ の中の素因数 5 の倍数を求めるためには、M を N と考えて、同じ手順を繰り返せばよい。

したがって、$N!$ が持つ素因数 5 の個数を求めるためには、[プログラム１] の **クケコ** 行を **サ** に変更すればよい。**サ** に当てはまるものを、次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ INPUT PROMPT "N="; N
① INPUT PROMPT "C="; C
② INPUT PROMPT "M="; M
③ LET C=5
④ LET D=5
⑤ LET M=D

変更した[プログラム１]を実行することにより、2014! は素因数 5 を **シスセ** 個もつことがわかる。したがって、2014! が持つ素因数 5 の個数と素因数 2 の個数について考えることにより、2014! を 10 で割り切れる限り割り続けると、**ソタチ** 回割れることができる。

(4) N 以下のすべての素数が、$N!$ の素因数として含まれる。その個数は、素数 2 や素数 5 の場合と同様に求められる。N 以下のすべての素因数について、$N!$ がもつ素因数とその個数を順に出力するように、[プログラム１] を変更して [プログラム２] を作成した。行番号に下線が引かれた行は、変更または追加された行である。

ただし、繰り返し処理「FOR K=A TO B ～ NEXT K」において、B が B より大きい場合、この繰り返し処理は実行されず次の処理に進む。

[プログラム２]

```
100  INPUT PROMPT "N=": N
110  FOR D=2 TO N
111      FOR K=2 TO D-1
112          IF [ツ] THEN [テ]
```

```
113     NEXT K
120     LET C=0
130     LET M=N
140     FOR J=1 TO N
150         LET M=INT(M/D)
160         LET [ ウ ]
170         IF [ エ ] THEN GOTO 190
180     NEXT J
190     PRINT “素因数”;D;“は”;C;“個”
191  NEXT D
200  END
```

［プログラム２］の 111 行から 113 行までの処理は、D が素数であるかどうかの判定をするためのものである。$\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを、次の ⓪ ～ ⑧ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

⓪ INT(D/K) = 1
① INT(D/K) > 1
② D=INT(D/K)*K
③ D<>INT(D/K)*K
④ GOTO 120
⑤ GOTO 130
⑥ GOTO 180
⑦ GOTO 190
⑧ GOTO 191

［プログラム２］を実行し、変数 N に 26 を入力したとき、190 行は $\boxed{\text{ト}}$ 回実行される。$\boxed{\text{ト}}$ 回のうち、変数 C の値が 2 となるのは $\boxed{\text{ナ}}$ 回である。

---

(1) $N = 6$ のとき、素因数分解は $6! = 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ である。つまり、$6!$ は素因数 2 を 4 個、素因数 3 を 2 個、素因数 5 を 1 個もつ。

(2) ［プログラム１］において、変数 D は素因数 2、 C は素因数 2 の個数を表す。

140 行から 180 行の作業は M を D=2 で繰り返し割り、その整数部分を C に加えていく。
150 行では INT(M/D)、つまり M/D の整数部分を求め、その値を改めて M に代入している。次の 160 行で整数部分を C に加えていくため、$\boxed{\text{ウ}}$ には C=C+M（選択肢は②）が入る。その次の 170 行では M<D=2 の判定を行い、正しければ繰り返しの作業を終え 190 行に移動する。このため、$\boxed{\text{エ}}$ には M<D（選択肢は③）が入る。

［プログラム１］（選択肢記入後）

```
100  INPUT PROMPT “N=”：N
110  LET D=2
120  LET C=0
130  LET M=N
140  FOR J=1 TO N
150      LET M=INT(M/D)
160      LET C=C+M
170      IF M<D THEN GOTO 190
180  NEXT J
190  PRINT “素因数”；D；“は”；C；“個”
200  END
```

N に 101 を入力したとき、M の値を順に表示すると、

$$101 \to 50 \to 25 \to 12 \to 6 \to 3 \to 1$$

となる。変数 J は 150 行の LET M=INT(M/D) を行った回数であるため、J の値は 6 になる。また、出力される変数 C の値は

$$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = \mathbf{97}$$

である。

(3) $N!$ がもつ素因数 5 の個数を求めるには、(2) の方法を応用して、$\dfrac{N}{5}$ の整数部分を順に加えていけばよい。

よって、個数を求めるには［プログラム１］で 2 で割る操作を替えて 5 で割ればよい。つまり 110 行を LET D=5 （選択肢は④）に変更すればよい。

変更した［プログラム１］を使うと、$2014!$ のときの変数 M の値を順に表示すると

$$2014 \to 402 \to 80 \to 16 \to 3$$

となるため、$2014!$ は素因数 5 を $402+80+16+3=\mathbf{501}$ 個もつことが分かる。

上記の $2014!$ がもつ素因数 5 の個数を P_5 とする。 また $2014!$ がもつ素因数 2 の個数を P_2 とする。このとき、

$$P_5 < 1007 = \frac{2014}{2} < P_2$$

が成り立つ。

$2014!$ が 10^P まで割り切れるとき

$$2014! = Q \times 10^P = Q \times 2^P \times 5^P$$

を満たす 10 で割り切れない整数 Q がある。5^P は $2014!$ の約数であるため、5^{P_5} の約数でもある。よって $P \leq P_5$ が成り立つ。

いま、$P < P_5$ であるとすると、$Q \times 2^P$ は $5^{P_5 - P}$ つまり、5 で割り切れる。2 は 5 と互いに素であるため、Q が 5 で割り切れることになる。一方、$P < P_5 < P_2$ であり、2 は 5 と互いに素であるため、Q が 2 で割り切れることにもなる。このことから Q は 10 で割り切れることになり矛盾が起きる。

よって $P = P_5 = \mathbf{501}$ であることがわかる。

(4)［プログラム２］において、111 行から 113 行までは変数 D が素数であるかの判定を行う。D が素数でないときは、2≦K≦D-1 を満たす整数 K で割り切れる。$\boxed{\textbf{ツ}}$ に入る式は割り切れるときの条件

D = INT (D/K)∗K

（選択肢は ②）である。この条件式が成り立つとき、D は素数でないため、以降の 120 行から 190 行までの操作は行われない。よって $\boxed{\text{テ}}$ に入る式は

GOTO 191

（選択肢は ⑧）である。

［プログラム２］（選択肢記入後）

```
100  INPUT PROMPT  “N=” : N
110  FOR D=2 TO N
111      FOR K=2 TO D-1
112          IF  D = INT (D/K)∗K  THEN  GOTO 191
113      NEXT K
120      LET C=0
130      LET M=N
140      FOR J=1 TO N
150          LET M=INT(M/D)
160          LET  C=C+M
170          IF  M<D  THEN GOTO 190
180      NEXT J
190      PRINT  “素因数”; D ; “は” ; C ; “個”
191  NEXT D
200  END
```

190 行は N 以下の素数の数だけ表示される。$N = 26$ のときは 26 以下の素数

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad 19, \quad 23$$

の 9 個あるため、190 行は **9** 回実行される。26 を各素数で割るとき、7 以下ならば $C \geq 3$ となり、$11, 13$ のときは $C = 2$ となり、17 以上のときは $C = 1$ となる。よって $C = 2$ となるのは $\mathbf{2}$ 回ある。