

2015 年度センター試験 数学 1

第 1 問

[1] k, a, b, c を実数とする。 x の 4 次式

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 + kx - 8$$

は

$$(x^2 + ax + 4)(x^2 + bx - c)$$

と因数分解されているとする。

(1) $c = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $a < b$ ならば、 $a = \boxed{\text{イ}}$, $b = \boxed{\text{ウ}}$ であり、このとき $k = \boxed{\text{エオ}}$ となる。

$a \geq b$ ならば、 $a = \boxed{\text{カ}}$, $b = \boxed{\text{キ}}$ であり、このとき $k = \boxed{\text{クケ}}$ となる。

(3) $(x^2 + ax + 4)(x^2 + bx - c) = 0$ を満たす正の実数 x は、 $a < b$ のときは $\boxed{\text{コサ}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ であり、 $a \geq b$ のときは $\boxed{\text{ス}}$ である。

(1)

$$\begin{aligned} (x^2 + ax + 4)(x^2 + bx - c) \\ = x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 + (4b - ac)x - 4c \end{aligned}$$

となるため、定数項を比較すると、 $-4c = -8 \Rightarrow c = 2$

(2) 上の式の他の係数を比較すると

$$a + b = 5, \quad ab + 2 = 6 \Rightarrow ab = 4$$

となるため、 a, b は t の 2 次方程式

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

の解である。この 2 次方程式の解は $t = 1, 4$ である。

また

$$4b - ac = k \Rightarrow k = -2a + 4b$$

となる。

$a < b$ ならば、 $a = 1$, $b = 4$ であり、このとき

$$k = -2 \times 1 + 4 \times 4 = \mathbf{14}$$

となる。

一方 $a \geq b$ ならば、 $a = 4$, $b = 1$ であり、このとき

$$k = -2 \times 4 + 4 \times 1 = \mathbf{-4}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned}(x^2 + ax + 4)(x^2 + bx - c) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + ax + 4 &= 0 \text{ or } x^2 + bx - c = 0\end{aligned}$$

が成り立つ。 $a < b$ のとき、

$$x^2 + ax + 4 = x^2 + x + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$$

となるため、 $x^2 + bx - c = x^2 + 4x - 2 = 0$ が成り立つ。よって

$x = -2 \pm \sqrt{6}$ ここで、 $-2 + \sqrt{6} > 0$, $-2 - \sqrt{6} < 0$ より求める正の実数 x

は $\mathbf{-2 + \sqrt{6}}$ である。

一方、 $a \geq b$ のとき、

$$\begin{aligned}x^2 + a x + 4 &= x^2 - 4 x + 4 = (x - 2)^2 \\x^2 + b x - c &= x^2 + x - 2 = (x - 2)(x + 1)\end{aligned}$$

となるため、 $(x^2 + a x + 4)(x^2 + b x - c) = 0$ ならば $x = 2, -1$ が成り立つ。よって求める正の実数 x は **2** である。

[1] の正解

ア	イ	ウ	エオ	カ	キ
2	1	4	14	4	1
クケ	コサ	シ	ス		
−4	−2	6	2		

[2] 条件 p_1, p_2, q_1, q_2 の否定をそれぞれ $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{q_1}, \overline{q_2}$ と書く。

(1) 次の **セ** に当てはまるものを、下の ① ~ ③ のうちから一つ選べ。

命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \Rightarrow (q_1 \text{ かつ } q_2)$ 」の対偶は **セ** である。

① $(\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2}) \Rightarrow (\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2})$

① $(\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2}) \Rightarrow (\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2})$

② $(\overline{q_1} \text{ かつ } \overline{q_2}) \Rightarrow (\overline{p_1} \text{ かつ } \overline{p_2})$

③ $(\overline{p_1} \text{ かつ } \overline{p_2}) \Rightarrow (\overline{q_1} \text{ かつ } \overline{q_2})$

(2) 自然数 n に対する条件 p_1, p_2, q_1, q_2 を次のように定める。

p_1 : n は素数である。

p_2 : $n + 2$ は素数である。

q_1 : $n + 1$ は 5 の倍数である。

q_2 : $n + 1$ は 6 の倍数である。

30 以下の自然数 n の中で **ソ** と **タチ** は

命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \Rightarrow (\overline{q_1} \text{ かつ } q_2)$ 」

の反例となる。

(1) 命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \Rightarrow (q_1 \text{ かつ } q_2)$ 」の対偶は

$$\overline{(q_1 \text{ かつ } q_2)} \Rightarrow \overline{(p_1 \text{ かつ } p_2)}$$

つまり

① $(\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2}) \Rightarrow (\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2})$

である。

(2) 命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \Rightarrow (\overline{q_1} \text{ かつ } q_2)$ 」の反例であるとき、 $(p_1 \text{ かつ } p_2)$

が成り立つが $(\overline{q_1}$ かつ $q_2)$ は成り立たない。

30 以下の自然数 n の中で、 $(p_1$ かつ $p_2)$ つまり、 n も $n+2$ も素数であるものは

$$n = 3, 5, 11, 17, 29$$

の 5 個ある。

これらの自然数の中で、 $(\overline{q_1}$ かつ $q_2)$ つまり、 $n+1$ は 5 の倍数ではないが 6 の倍数であるものは $n = 5, 11, 17$ の 3 個のみ。よって残りの $n = 3, 29$ の 2 個が求める反例となる。

[2] の正解

セ	ソ	タチ
1	3	29