2015年度センター試験　数学1

第3問

三角形 ABC において、$AB=4,\ BC=7,\ CA=\sqrt{23}$ とし、点 A から辺 BC へ下ろした垂線と BC の交点を D とする。このとき

$$\cos\angle ABC=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\qquad \sin\angle ABC=\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}},\ AD=\sqrt{\boxed{オ}}$$

である。

点 C から直線 AB へ下ろした垂線と直線 AB の交点を AE とすると、点 E は辺 AB の A の側の延長上にあり

$$BE=\frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}},\qquad \cos\angle DAE=\frac{\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$$

である。

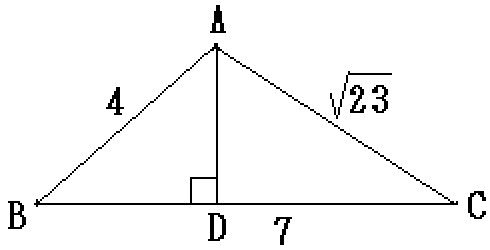
さらに直線 AD と直線 CE の交点を F とする。このとき

$$AF=\frac{\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}\ ,\qquad BF=\frac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タチツ}}}{\boxed{テ}}$$

となり、三角形 ABF の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナニヌ}}}{\boxed{ネ}}$ である。また、

$$\frac{\text{三角形 } ABD \text{ の面積}}{\text{三角形 } AEF \text{ の面積}} = \frac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

である。



(1) 余弦定理より

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{4^2 + 7^2 - \left(\sqrt{23}\right)^2}{2 \times 4 \times 7} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

よって

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \mathbf{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

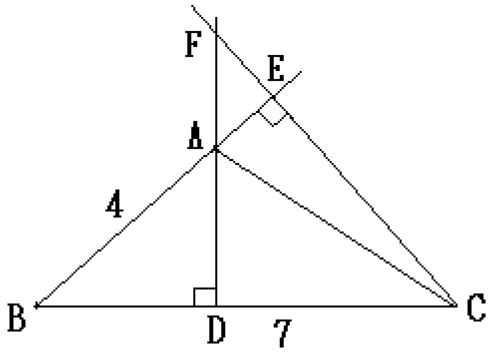
このことから三角形 ABC の面積を求めると、

$$\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{7}{2}\sqrt{7}$$

となる。一方、三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2} \times BC \times AD$ によっても求められるため、

$$\frac{1}{2} \times 7 \times AD = \frac{7}{2}\sqrt{7} \Rightarrow AD = \mathbf{\sqrt{7}}$$

である。



点 C から直線 AB へ下ろした垂線と直線 AB の交点を AE とする。

$$\cos\angle CBE = \cos\angle ABC = \frac{3}{4}$$

となることから

$$BE = CB \times \cos\angle CBE = 7 \times \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{21}{4}}$$

また

$$\cos\angle BAD = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{4}$$

である。点 E は辺 AB の A の側の延長上にあるため、$\angle BAD + \angle DAE = 180°$ である。よって、

$$\cos\angle DAE = -\cos\angle BAD = \mathbf{\frac{-\sqrt{7}}{4}}$$

直線 AD と直線 CE の交点を F とする。このとき三角形 ABD と三角形 AFE について、$\angle BAD = \angle FAE,\ \angle ADB = \angle AEF$ であることから三角形

ABD と三角形 AFE は相似である。よって $AB : AD = AF : AE$ となるため、

$$AF = AB \times AE \times \frac{1}{AD} = 4 \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{7}}{7}}$$

となる。

　また

$$DF = DA + AF = \sqrt{7} + \frac{5\sqrt{7}}{7} = \frac{12}{7}\sqrt{7}$$

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{16 - 7} = 3$$

となることから、

$$BF = \sqrt{DF^2 + BD^2} = \sqrt{9 + \frac{144}{7}} = \sqrt{\frac{207}{7}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{161}}{7}}$$

三角形 ABF について、$\angle BAF = \angle DAE$ より

$$\sin \angle BAF = \sqrt{1 - (\cos \angle DAE)^2} = \sqrt{1 - \frac{7}{16}} = \frac{3}{4}$$

よって、正弦定理より ABF の外接円の半径は

$$\frac{1}{2} \times \frac{BF}{\sin \angle BAF} = \frac{3\sqrt{161}}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{161}}{7}}$$

である。

　三角形 ABD と三角形 AFE は相似であることから

$$\frac{\text{三角形 }ABD\text{ の面積}}{\text{三角形 }AEF\text{ の面積}} = \frac{AB^2}{AF^2} = 4^2 \times \left(\frac{7}{5\sqrt{7}}\right)^2 = \mathbf{\frac{112}{25}}$$

である。

第３問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カキ	ク
3	**4**	**7**	**4**	**7**	**21**	**4**
ケ，コ	サ	シ、ス	セ	ソ	タチツ	テ
$\mathbf{-\sqrt{7}}$	**4**	$\mathbf{5\sqrt{7}}$	**7**	**3**	**161**	**7**
ト	ナニヌ	ネ	ノハヒ	フヘ		
2	**161**	**7**	**112**	**25**		