

2015 年度センター試験 数学 1A

第 2 問

[1] 条件 p_1, p_2, q_1, q_2 の否定をそれぞれ $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{q_1}, \overline{q_2}$ と書く。

(1) 次の **ア** に当てはまるものを、下の ① ～ ③ のうちから一つ選べ。

命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \Rightarrow (q_1 \text{ かつ } q_2)$ 」の対偶は **ア** である。

- ① $(\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2}) \Rightarrow (\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2})$
- ① $(\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2}) \Rightarrow (\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2})$
- ② $(\overline{q_1} \text{ かつ } \overline{q_2}) \Rightarrow (\overline{p_1} \text{ かつ } \overline{p_2})$
- ③ $(\overline{p_1} \text{ かつ } \overline{p_2}) \Rightarrow (\overline{q_1} \text{ かつ } \overline{q_2})$

(2) 自然数 n に対する条件 p_1, p_2, q_1, q_2 を次のように定める。

p_1 : n は素数である。

p_2 : $n + 2$ は素数である。

q_1 : $n + 1$ は 5 の倍数である。

q_2 : $n + 1$ は 6 の倍数である。

30 以下の自然数 n の中で **イ** と **ウエ** は

命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \Rightarrow (\overline{q_1} \text{ かつ } q_2)$ 」

の反例となる。

(1) 命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \Rightarrow (q_1 \text{ かつ } q_2)$ 」の対偶は

$$\overline{(q_1 \text{ かつ } q_2)} \Rightarrow \overline{(p_1 \text{ かつ } p_2)}$$

つまり

$$\textcircled{1} \quad (\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2}) \Rightarrow (\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2})$$

である。

(2) 命題 「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \Rightarrow (\overline{q_1} \text{ かつ } q_2)$ 」の反例であるとき、 $(p_1 \text{ かつ } p_2)$ が成り立つが $(\overline{q_1} \text{ かつ } q_2)$ は成り立たない。

30 以下の自然数 n の中で、 $(p_1 \text{ かつ } p_2)$ つまり、 n も $n+2$ も素数であるものは

$$n = 3, 5, 11, 17, 29$$

の 5 個ある。

これらの自然数の中で、 $(\overline{q_1} \text{ かつ } q_2)$ つまり、 $n+1$ は 5 の倍数ではないが 6 の倍数であるものは $n = 5, 11, 17$ の 3 個のみ。よって残りの $n = 3, 29$ の 2 個が求める反例となる。

[1] の正解

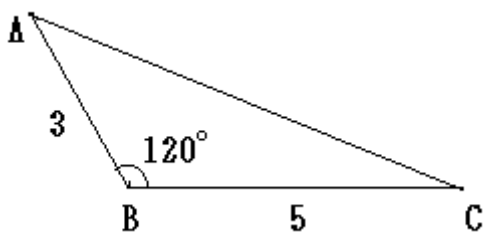
ア	イ	ウエ
1	3	29

[2] 三角形 ABC において、 $AB = 3, BC = 5, \angle ABC = 120^\circ$ とする。

このとき $AC = \boxed{\text{オ}}$, $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり、

$\sin \angle BCA = \frac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

直線 BC 上に点 D を、 $AD = 3\sqrt{3}$ かつ $\angle ADC$ が鋭角、となるようにとる。点 P を線分 BD 上の点とし、三角形 APC の外接円の半径を R とすると、 R のとり得る値の範囲は $\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \leq R \leq \boxed{\text{セ}}$ である。



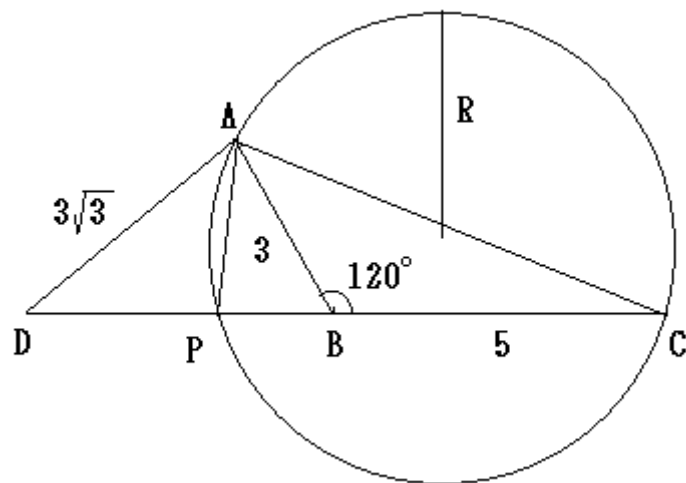
(1) 余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \angle ABC \\ &= 9 + 25 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 \times 5 \\ &= 49 \end{aligned}$$

$AC > 0$ より $AC = 7$ となる。また、 $\sin \angle ABC = \sin 120^\circ = \sqrt{3}/2$ であることから、正弦定理より

$$\frac{7}{\sin \angle ABC} = \frac{3}{\sin \angle BCA} \Rightarrow \sin \angle BCA = \frac{3}{7} \times \sin \angle ABC = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

となる。



(2) 正弦定理より

$$2R = \frac{AP}{\sin \angle ACP}$$

である。ここで $\angle ACP = \angle BCA$ より

$$R = \frac{1}{2} \times AP \times \frac{14}{3\sqrt{3}} = \frac{7}{3\sqrt{3}} AP$$

つまり、外接円の半径 R は AP の長さと比例している。

点 P が辺 BD 上を動くとき、 AP の長さが最大になるときは $P = D$ のときであり、 $AP = 3\sqrt{3}$ となる。よって R の最大値は

$$\frac{7}{3\sqrt{3}} \times 3\sqrt{3} = 7$$

である。一方、 AP の長さが最小になるときは AP が BD の垂線をなすときである。このとき $\angle ABD = 60^\circ$ より $AP = 3\sqrt{3}/2$ となるため、よって R の最小値は

$$\frac{7}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2}$$

以上から R の範囲は

$$\frac{7}{2} \leq R \leq 7$$

である。

[2] の解答

オ	カ	キ	ク	ケ	コサ
7	3	2	3	3	14
シ	ス	セ			
7	2	7			