

2015 年度センター試験 数学 1A

第 5 問

以下では、 $a = 756$ とし、 m は自然数とする。

(1) a を素因数分解すると

$$a = 2^{\boxed{\text{ア}}} \cdot 3^{\boxed{\text{イ}}} \cdot \boxed{\text{ウ}}$$

である。

a の正の約数の個数は $\boxed{\text{エオ}}$ 個である。

(2) $\sqrt{am}$ が自然数となる最小の自然数 m は $\boxed{\text{カキ}}$ である。 $\sqrt{am}$ が自然

数となるとき、 m はある自然数 k により、 $m = \boxed{\text{カキ}} k^2$ と表される数であ

り、そのときの $\sqrt{am}$ の値は $\boxed{\text{クケコ}} k$ である。

(3) 次に、自然数 k により $\boxed{\text{クケコ}} k$ と表される数で、11 で割った余りが 1 となる最小の k を求める。1 次不定方程式

$$\boxed{\text{クケコ}} k - 11l = 1$$

を解くと、 $k > 0$ となる整数解 (k, l) のうち k が最小のものは、
 $k = \boxed{\text{サ}}$ ， $l = \boxed{\text{シスセ}}$ である。

(4) $\sqrt{am}$ が 11 で割ると 1 余る自然数となるとき、そのような自然数 m のなかで最小のものは $\boxed{\text{ソタチツ}}$ である。

(1) $a = 4 \times 27 \times 7$ より

$$a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

である。

一般に素因数分解が $2^{a_2} \times 3^{a_3} \times 5^{a_5} \times \dots$ である整数の正の約数の個数は

$$(a_2 + 1) \times (a_3 + 1) \times (a_5 + 1) \times \dots$$

と表すことができる。よって a の正の約数は $(2 + 1) \times (3 + 1) \times (1 + 1) = \mathbf{24}$ 個である。

(2) $\sqrt{am}$ が自然数であるとき、 am は自然数の2乗である。よって

$$am = 2^{2a_2} \times 3^{2a_3} \times 5^{2a_5} \times \dots$$

($a_2, a_3, a_5, \dots$ は0以上の整数) という式が成り立つ。この条件を満たす自然数 m について、 $a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ より

$$\begin{aligned} am &= 2^{2+2a_2} \times 3^{4+2a_3} \times 7^{2+2a_7} \times t^2 \\ \Rightarrow m &= 2^{2a_2} \times 3^{1+2a_3} \times 7^{1+2a_7} \times t^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$k = 2^{a_2} \times 3^{a_3} \times 7^{a_7} \times t$$

とすると、 m はある自然数 k により、 $m = 21k^2$ と表される。よって、 $\sqrt{am}$ が自然数である最小の自然数 m は $k = 1$ のときの **21** である。

このときの $\sqrt{am}$ の値は

$$\sqrt{am} = \sqrt{2^2 \times 3^4 \times 7^2 \times k^2} = 2 \times 3^2 \times 7 \times k = \mathbf{126k}$$

である。

(3) 自然数 k により $126k$ と表される数で、11 で割った余りが 1 となる最小の k を求める。1 次不定方程式

$$126k - 11l = 1$$

について、 $126 = 11 \times 11 + 5$ より上の式は

$$5k + 11 \times (11k + l) = 1$$

と変形できる。この式から $5k$ は 11 で割ると 1 余るものであることがわかる。正の整数 k で $5k$ を 11 で割ると 1 余るものは $k = 9$ のときの $5k = 45$ が最小である。また

$$11l = 126 \times 9 - 1 = 1133 \Rightarrow l = 103$$

よって、 $k > 0$ となる整数解 (k, l) のうち k が最小のものは、 $k = 9$, $l = 103$ である。

(4) $\sqrt{am}$ が 11 で割ると 1 余る自然数となるとき、そのような自然数 m のなかで最小のものは (3) より $m = 21 \times 9^2 = 1701$ である。

問 5 の解答

ア	イ	ウ	エオ	カキ
2	3	7	24	21
クケコ	サ	シスセ	ソタチツ	
126	9	103	1701	