2015 年度センター試験　数学２

第１問

[１] O を原点とする。座標平面上の２点 $P\,(2\cos\theta, 2\sin\theta)$，$Q\,(2\cos\theta + \cos 7\theta,\ 2\sin\theta + \sin 7\theta)$ を考える。ただし、$\dfrac{\pi}{8} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{ア}$ 、$PQ = \boxed{イ}$ である。また

$$OQ^2 = \boxed{ウ} + \boxed{エ}\ (\cos 7\theta \cos\theta + \sin 7\theta \sin\theta)$$

$$= \boxed{ウ} + \boxed{エ} \cos\left(\boxed{オ}\ \theta\right)$$

である。

よって、$\dfrac{\pi}{8} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で、OQ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{カ}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる。

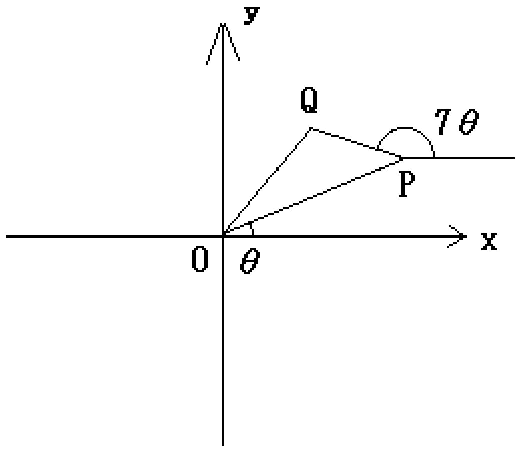
(2) ３点 $O,\ P,\ Q$ が一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線 OP を表す方程式は $\boxed{ク}$ である。$\boxed{ク}$ に当てはまるものを、次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ $(\cos\theta)\,x + (\sin\theta)\,y = 0$　① $(\sin\theta)\,x + (\cos\theta)\,y = 0$
② $(\cos\theta)\,x - (\sin\theta)\,y = 0$　③ $(\sin\theta)\,x - (\cos\theta)\,y = 0$

このことにより、$\dfrac{\pi}{8} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で、３点 $O,\ P,\ Q$ が一直線上にあるのは $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{ケ}}$ のときであることがわかる。

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\boxed{コ}}$ のときである。したがって、$\dfrac{\pi}{8} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で、$\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi$ のときである。



(1)

$$OP^2 = 4\ \cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$$

より、$OP = \mathbf{2}$ である。また、

$$(\ 2\cos\theta + \cos 7\,\theta\ ) - 2\cos\theta = \cos 7\theta$$
$$(\ 2\sin\theta + \sin 7\,\theta\ ) - 2\sin\theta = \sin 7\theta$$

より、

$$PQ^2 = \ \cos^2 7\,\theta + \sin^2 7\,\theta = 1$$

となるため、$PQ = \mathbf{1}$ である。

$$(\ 2\cos\theta + \cos 7\,\theta\ )^2 = 4\cos^2\theta + \cos^2 7\,\theta + 4\cos\theta\cos 7\,\theta$$
$$(\ 2\sin\theta + \sin 7\,\theta\ )^2 = 4\sin^2\theta + \sin^2 7\,\theta + 4\sin\theta\sin 7\,\theta$$

より、

$$\begin{aligned} OQ^2 &= (\ 2\cos\theta + \cos 7\,\theta\ )^2 + (\ 2\sin\theta + \sin 7\,\theta\ )^2 \\ &= 4 + 1 + 4\cos\theta\cos 7\,\theta + 4\sin\theta\sin 7\,\theta \\ &= \mathbf{5} + \mathbf{4}\,(\cos\theta\cos 7\,\theta + \sin\theta\sin 7\,\theta) \end{aligned}$$

である。また、加法定理より

$$\cos\ (7\theta\ -\theta) = \cos\theta\cos 7\,\theta + \sin\theta\sin 7\,\theta$$

となるため、

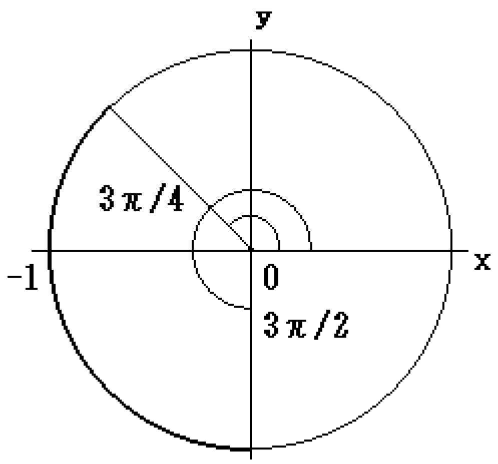
$$OQ^2 = 5 + 4\cos(\mathbf{6}\,\theta)$$

である。

$\dfrac{\pi}{8} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ の範囲において、$\dfrac{3\pi}{4} \le 6\,\theta \le \dfrac{3\pi}{2}$ であるため

$$-1 \le \cos(6\,\theta) \le 0$$

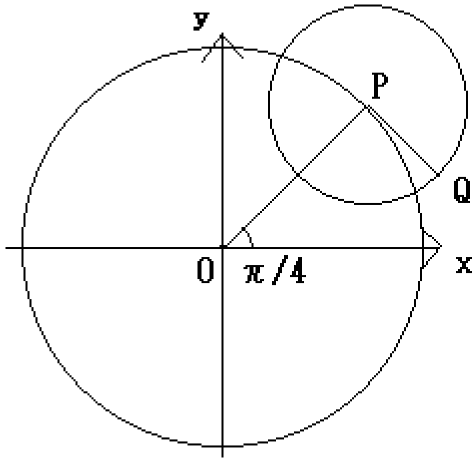
となる。



$OQ = \sqrt{5 + 4\cos(6\,\theta)}$ が最大となるときは $\cos(6\,\theta)$ が最大となるときであるため、$\dfrac{\pi}{8} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で、OQ は $\cos(6\,\theta) = 0$ つまり、

$$6\,\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow\ \ \theta = \frac{\pi}{\mathbf{4}}$$

のとき最大値 $\sqrt{\mathbf{5}}$ をとる。



⑵ 直線 OP の傾きは

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

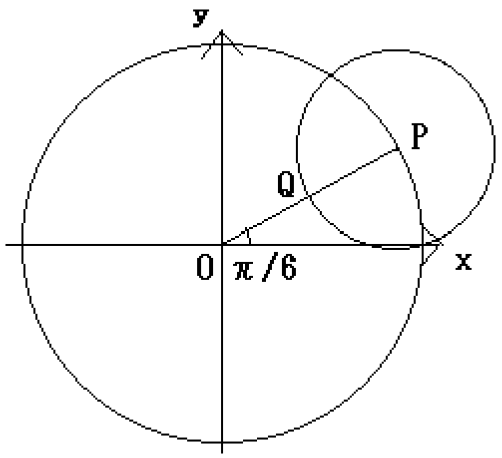
であるため、直線 OP を表す式は

$$y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,x \;\Rightarrow\; \boldsymbol{(\sin\ \theta)\,x - (\cos\theta)\,y\ =\ 0}$$

である。３点 $O,\ P,\ Q$ が一直線上にあるとき、点 Q は直線 OP 上にある。
よって

$$\begin{aligned}
&\sin\theta\,(\,2\cos\theta + \cos 7\,\theta\,) - \cos\theta\ (2\sin\theta + \sin 7\,\theta) = 0\\
\Rightarrow\ &\sin\theta\ \cos 7\,\theta - \cos\theta\ \sin 7\,\theta = 0\\
\Rightarrow\ &\sin\ (6\theta) = 0
\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{8} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で、$\sin\ (6\theta) = 0$ を満たすのは $6\theta = \pi \Rightarrow\ \theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$ のとき。３点 $O,\ P,\ Q$ が一直線上にあるのは、このときであることがわかる。



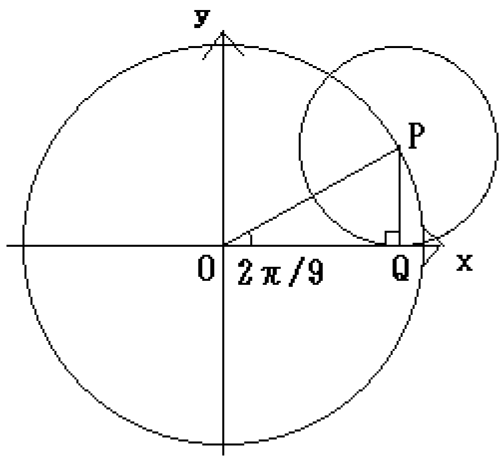
(3) $\angle OQP$ が直角となるとき、三角形 OQP は直角三角形であるため、

$$OQ^2 = OP^2 - PQ^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

つまり、$OQ = \sqrt{3}$ のときである。したがって、

$$5 + 4\cos(6\theta) = 3 \Rightarrow \cos(6\theta) = -\frac{1}{2}$$

$\dfrac{\pi}{8} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で、上の式を満たすのは $6\theta \leq \dfrac{4\pi}{3}$ であるため、$\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \mathbf{\dfrac{2}{9}}\pi$ のときである。



［１］の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
2	**1**	**5**	**4**	**6**	**4**
キ	ク	ケ	コ	サ	シ
5	**3**	**6**	**3**	**2**	**9**

［２］a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(*)\begin{cases} x\sqrt{y^2} = a \\ \sqrt[3]{x}\ \ y\ = b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y について考えよう。

(1) 連立方程式 (*) を満たす正の実数 x, y は

$$x = a^{\boxed{\text{ス}}}\, b^{\boxed{\text{セソ}}}, \qquad y = a^{p}\, b^{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。ただし

$$p = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。a が $a > 0$ の範囲を動くとき、連立方程式 (*) を満たす正の実数 $x,\ y$ について、$x + y$ の最小値を求めよう。

$b = 2\sqrt[3]{a^2}$ であるから、(*) を満たす正の実数 $x,\ y$ は、a を用いて

$$x = 2^{\boxed{\text{セソ}}}\, a^{\boxed{\text{トナ}}}, \qquad y = 2^{\boxed{\text{タ}}}\, a^{\boxed{\text{ニ}}}$$

と表される。したがって、相加平均と相乗平均の関係を利用すると $x + y$ は $a = 2^{q}$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

連立方程式 (*) の第２式より

$$x^{\frac{1}{3}}y = b \ \Rightarrow \ y = x^{-\frac{1}{3}}b \ \Rightarrow \ y^{\frac{3}{2}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}b\right)^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$$

この式を第１式に代入する。

$$a = x\,y^{\frac{3}{2}} = x \times x^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{3}{2}} \ \Rightarrow \ x^{\frac{1}{2}} = a\,b^{-\frac{3}{2}} \ \Rightarrow \ x = a^{\mathbf{2}}b^{\mathbf{-3}}$$

よって

$$y = (a^{\mathbf{2}}b^{\mathbf{-3}})^{-\frac{1}{3}}\,b = a^{-\frac{2}{3}}\,b \times b = a^{-\frac{2}{3}}\,b^{\mathbf{2}}$$

となり、

$$p = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}$$

であることがわかる。

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4} = 2\,a^{4/3}$ とするとき、(1) の式より

$$x = a^2\,b^{-3} = a^2\,\left(2\,a^{\frac{4}{3}}\right)^{-3} = a^2 \times 2^{-3} \times a^{-4} = 2^{-3}a^{\mathbf{-2}}$$

$$y = a^{-\frac{2}{3}}b^2 = a^{-\frac{2}{3}}\left(2\,a^{\frac{4}{3}}\right)^2 = a^{-\frac{2}{3}} \times 2^2 \times a^{\frac{8}{3}} = 2^2 \times a^{\mathbf{2}}$$

となる。

　a が $a > 0$ の範囲を動くとき、$x, y > 0$ より相加平均と相乗平均の関係を利用すると

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{x\,y} = \sqrt{2^{-3}a^{-2} \times 2^2\,a^2} = \sqrt{2^{-1}} = 2^{-\frac{1}{2}}$$

よって $x + y \leq 2 \times 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ 。ここで $x + y = \sqrt{2}$ となるときは

$$x = y \;\Rightarrow\; 2^{-3}a^{-2} = \;2^2\,a^2 \;\Rightarrow\; a^4 = 2^{-5} \;\Rightarrow\; a = 2^{-\frac{5}{4}}$$

となる。よって $q\; = \boldsymbol{\frac{-5}{4}}$ とすると、$a = 2^q$ のとき $x + y$ は最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ をとる。

［２］の正解

ス	セソ	タ	チツ	テ
2	**−3**	**2**	**−2**	**3**
トナ	ニ	ヌ	ネノ	ハ
−2	**2**	**2**	**−5**	**4**