2015 年度センター試験　数学２

第４問

(1)　$a,\ b$ を実数として、$P(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x - 5$ とする。虚数 $1 + 2\,i$ が方程式 $P(x) = 0$ の解であるとき、$a\,,b$ の値と他の解を求めよう。

$$P(1 + 2\,i) = \boxed{\text{アイウ}} - \boxed{\text{エ}}\,a + b + \left(\boxed{\text{オカ}} + \boxed{\text{キ}}\,a + 2\,b\right)i$$

となる。$P(1 + 2\,i) = 0$ であるから、$a = -\boxed{\text{ク}},\ b = \boxed{\text{ケ}}$ であり

$$P(x) = x^3 - \boxed{\text{ク}}\,x^2 + \boxed{\text{ケ}}\,x - 5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

　このとき、① により、$P\left(\boxed{\text{コ}}\right) = 0$ であるから、因数定理により

$$P(x) = \left(x - \boxed{\text{コ}}\right)\ (x^2 - \boxed{\text{サ}}\,x + \boxed{\text{シ}})$$

が成り立つ。したがって、$P(x) = 0$ の $1 + 2\,i$ 以外の解は $\boxed{\text{コ}}$ と $1 - \boxed{\text{ス}}\,i$ である。

(2)　p を実数として、$Q(x) = x^3 + p\,x^2 + p\,x + 1$ とする。方程式 $Q\,(x) = 0$ は、異なる三つの負の実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもつとする。ただし、$\alpha < \beta < \gamma$ とする。$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が条件

$$(\beta - \alpha) : (\gamma - \beta) = 3 : 2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を満たす時、三つの解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ と p の値を求めよう。

$Q(-\boxed{セ})=0$ であるから、因数定理により

$$Q(x)=(x+\boxed{セ})\ \{x^2+(p-\boxed{ソ})x+1\}$$

が成り立つ。

２次方程式

$$x^2+(p-\boxed{ソ})x+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が異なる二つの負の実数解をもつときの p のとり得る値の範囲は $p>\boxed{タ}$ である。

解と係数の関係から、方程式 ③ の解の一つは絶対値が 1 より大きく、他の解の絶対値は 1 より小さい。したがって、$\beta=-\boxed{セ}$ であり、α と γ は方程式 ③ の解であることがわかる。解と係数の関係と条件 ② により

$$\alpha=-\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}, \qquad \gamma=-\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}, \qquad p=\frac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌ}},$$

である。

---

(1)

$$(1+2\,i\,)^2=1+4\,i-4=\ -3+4\,i$$
$$(1+2\,i\,)^3=(1+2\,i)\,(-3+4\,i)=\ -11-2\,i$$

であることから、$P(x)$ に $x=1+2\,i$ を代入すると

$$\begin{aligned}P(1+2\,i)&=(-11-2\,i\,)+a\,(-3+4\,i)+b\,(1+2\,i)-5\\&=\mathbf{-16-3}\,a+b+(\mathbf{-2+4}\,a+2\,b)\,i\end{aligned}$$

となる。$P(1+2\,i)=0$ であるから、$a,\ b$ が実数であることより

$$\begin{cases} -16-3\,a+\ \ b=0 \\ -\,2+4\,a+2\,b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\mathbf{3} \\ b=\ \ \mathbf{7} \end{cases}$$

となるため

$$P(x)=x^3-3\,x^2+7\,x-\ 5\ \ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

である。

　このとき、① により、$P(\mathbf{1})=1^3-3\times1^2+7\times1-5=\ 0$ であるから、因数定理により

$$P(x)=(x-1)\ (x^2-\ \mathbf{2}\,x+\mathbf{5})$$

が成り立つ。二次方程式 $x^2-\ 2\,x+5=0$ の解は $x=1\pm2\,i$ である。したがって、$P(x)=0$ の $1+2\,i$ 以外の解は $\mathbf{1}$ と $1-\ \mathbf{2}\,i$ である。

⑵ $Q(x)=x^3+p\,x^2+p\,x+1$ について

$$Q(-\mathbf{1})=(-1)^2+p\times\ (-1)^2+p\ \times(-1)+1=0$$

となるため、因数定理より

$$Q(x)=(x+1)\ \{x^2+(p-\mathbf{1})x+1\}$$

が成り立つ。これより $x=-1$ が方程式 $Q(x)=0$ の一つの解である。

　２次方程式

$$x^2+(p-\ 1)\,x+1=0\ \ \cdots\cdots\cdots\text{③}$$

が異なる二つの負の実数解をもつときの p のとり得る値の範囲を考える。２次方程式 ③ の二つの解の和は $-(p-\ 1)$ となる。二つの解がともに負の実数解のとき

$$-(p-1) < 0 \ \Rightarrow \ p > 1$$

が成り立つ。また解が異なる実数解であるとき判別式 $(p-\ 1)^2-4$ は正であるため、

$$(p-\ 1)^2-4 > 0 \ \Rightarrow \ p < \ -1\,, \qquad 3 < p$$

が成り立つ。以上２つの範囲の共通部分である $p > \ \mathbf{3}$ が求める p の範囲である。

方程式 ③ の解を $\delta_1,\ \delta_2$ とすると、問題の条件からこれらの解の絶対値は 1 ではない。 $\delta_1 > 1$ であるとき解と係数の関係から

$$|\delta_2| = \left|\frac{1}{\delta_1}\right| = \frac{1}{|\delta_1|} < 1$$

となるため、方程式 ③ の解の一つは絶対値が 1 より大きく、他の解の絶対値は 1 より小さい。$\alpha < \beta < \gamma$ であるため、$\beta = -1$ であり、α と γ は方程式 ③ の解であることがわかる。

条件式 ② に $\beta =\ -1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(-1-\alpha):(\gamma+1) = 3:2 \ &\Rightarrow \ 2\,(-\alpha-1) = 3\,(\gamma+1)\\ &\Rightarrow \ 2\,\alpha + 3\,\gamma = -\,5\end{aligned}$$

この式に $\gamma = \alpha^{-1}$ を代入すると

$$2\,\alpha + 3\,\alpha^{-1} = -\,5 \ \Rightarrow \ 2\,\alpha^2 + 5\,\alpha + 3 = (\,\alpha+1)\,(\,2\,\alpha+3) = 0$$

よって $\alpha =\ -1\,, -3/2$ となるが、$\alpha\,,\ \beta\,, \gamma$ はすべて異なるため

$$\alpha = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\,, \qquad \gamma = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

である。また p の値は $\alpha + \gamma = -\,(p-1)$ より

$$p = 1 - \alpha - \gamma = \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{6}}$$

である。

第２問の正解

アイウ	エ	オカ	キ
−16	**3**	**−2**	**4**
ク	ケ	コ	サ
3	**7**	**1**	**2**
シ	ス	セ	ソ
5	**2**	**1**	**1**
タ	チ	ツ	テ
3	**3**	**2**	**2**
ト	ナニ	ヌ	
3	**19**	**6**	