

2015 年度センター試験 数学 2 B

第 1 問

[1] O を原点とする。座標平面上の 2 点 $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$, $Q(2 \cos \theta + \cos 7\theta, 2 \sin \theta + \sin 7\theta)$ を考える。ただし、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{\text{ア}}$ 、 $PQ = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$\begin{aligned} OQ^2 &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} (\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) \\ &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} \cos (\boxed{\text{オ}} \theta) \end{aligned}$$

である。

よって、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、 OQ は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

(2) 3 点 O, P, Q が一直線上にあるような θ の値を求めよう。

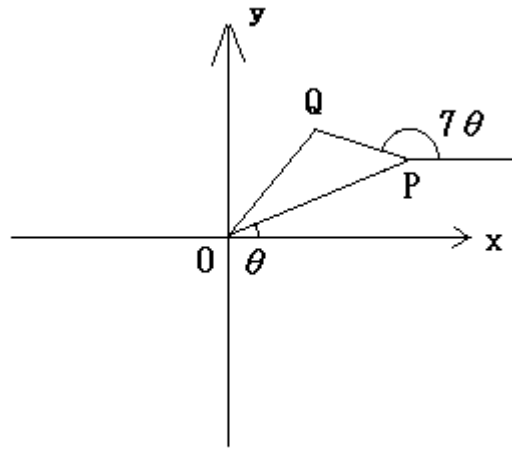
直線 OP を表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。 $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを、次の ①～③のうちから一つ選べ。

- ① $(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 0$ ② $(\sin \theta)x + (\cos \theta)y = 0$
③ $(\cos \theta)x - (\sin \theta)y = 0$ ④ $(\sin \theta)x - (\cos \theta)y = 0$

このことにより、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、3 点 O, P, Q が一直線上にあるのは $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる。

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって、

$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、 $\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi$ のときである。



(1)

$$OP^2 = 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta = 4 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4$$

より、 $OP = 2$ である。また、

$$\begin{aligned} (2 \cos \theta + \cos 7 \theta) - 2 \cos \theta &= \cos 7 \theta \\ (2 \sin \theta + \sin 7 \theta) - 2 \sin \theta &= \sin 7 \theta \end{aligned}$$

より、

$$PQ^2 = \cos^2 7 \theta + \sin^2 7 \theta = 1$$

となるため、 $PQ = 1$ である。

$$\begin{aligned} (2 \cos \theta + \cos 7 \theta)^2 &= 4 \cos^2 \theta + \cos^2 7 \theta + 4 \cos \theta \cos 7 \theta \\ (2 \sin \theta + \sin 7 \theta)^2 &= 4 \sin^2 \theta + \sin^2 7 \theta + 4 \sin \theta \sin 7 \theta \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} OQ^2 &= (2 \cos \theta + \cos 7 \theta)^2 + (2 \sin \theta + \sin 7 \theta)^2 \\ &= 4 + 1 + 4 \cos \theta \cos 7 \theta + 4 \sin \theta \sin 7 \theta \\ &= 5 + 4 (\cos \theta \cos 7 \theta + \sin \theta \sin 7 \theta) \end{aligned}$$

である。また、加法定理より

$$\cos (7 \theta - \theta) = \cos \theta \cos 7 \theta + \sin \theta \sin 7 \theta$$

となるため、

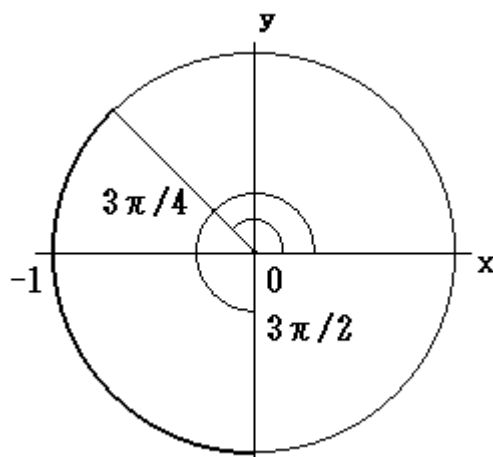
$$OQ^2 = 5 + 4 \cos(6 \theta)$$

である。

$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲において、 $\frac{3\pi}{4} \leq 6\theta \leq \frac{3\pi}{2}$ であるため

$$-1 \leq \cos(6 \theta) \leq 0$$

となる。

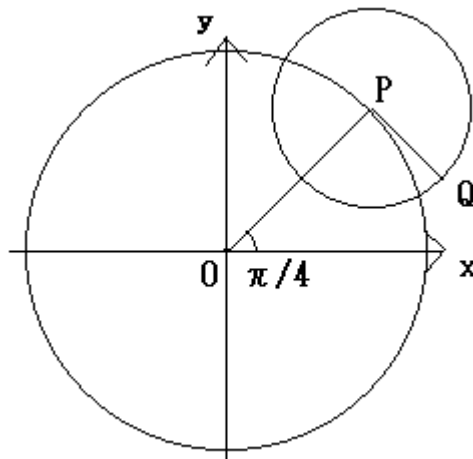


$OQ = \sqrt{5 + 4 \cos(6 \theta)}$ が最大となるときは $\cos(6 \theta)$ が最大となるときで

あるため、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、 OQ は $\cos(6 \theta) = 0$ つまり、

$$6 \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

のとき最大値 $\sqrt{5}$ をとる。



(2) 直線 OP の傾きは

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

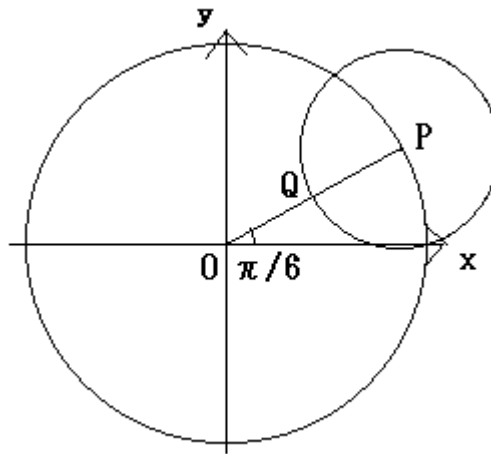
であるため、直線 OP を表す式は

$$y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x \Rightarrow (\sin \theta) x - (\cos \theta) y = 0$$

である。3点 O, P, Q が一直線上にあるとき、点 Q は直線 OP 上にある。
よって

$$\begin{aligned} \sin \theta (2 \cos \theta + \cos 7 \theta) - \cos \theta (2 \sin \theta + \sin 7 \theta) &= 0 \\ \Rightarrow \sin \theta \cos 7 \theta - \cos \theta \sin 7 \theta &= 0 \\ \Rightarrow \sin (6 \theta) &= 0 \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、 $\sin (6 \theta) = 0$ を満たすのは $6 \theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ のとき。3点 O, P, Q が一直線上にあるのは、このときであることがわかる。



(3) $\angle OQP$ が直角となるときの、三角形 OQP は直角三角形であるため、

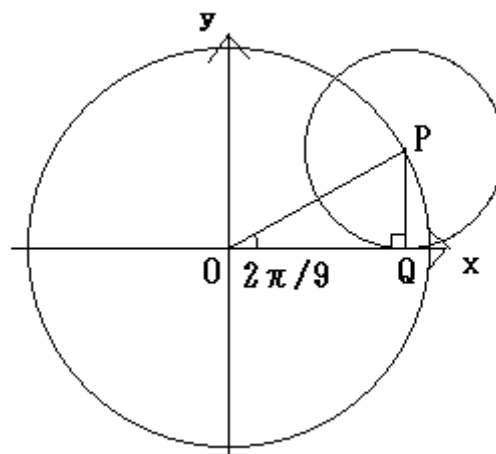
$$OQ^2 = OP^2 - PQ^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

つまり、 $OQ = \sqrt{3}$ のときである。したがって、

$$5 + 4 \cos(6\theta) = 3 \Rightarrow \cos(6\theta) = -\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で、上の式を満たすのは $6\theta \leq \frac{4\pi}{3}$ であるため、 $\angle OQP$

が直角となるのは $\theta = \frac{2}{9}\pi$ のときである。



[1] の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
2	1	5	4	6	4
キ	ク	ケ	コ	サ	シ
5	3	6	3	2	9

[2] a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(*) \begin{cases} x \sqrt{y^2} = a \\ \sqrt[3]{x} y = b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y について考えよう。

(1) 連立方程式 (*) を満たす正の実数 x, y は

$$x = a^{\boxed{\text{ス}}} b^{\boxed{\text{セソ}}}, \quad y = a^p b^{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。ただし

$$p = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(2) $b = 2 \sqrt[3]{a^4}$ とする。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき、連立方程式 (*) を満たす正の実数 x, y について、 $x + y$ の最小値を求めよう。

$b = 2 \sqrt[3]{a^2}$ であるから、(*) を満たす正の実数 x, y は、 a を用いて

$$x = 2^{\boxed{\text{セソ}}} a^{\boxed{\text{トナ}}}, \quad y = 2^{\boxed{\text{タ}}} a^{\boxed{\text{ニ}}}$$

と表される。したがって、相加平均と相乗平均の関係を利用すると $x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

連立方程式 (*) の第 2 式より

$$x^{\frac{1}{3}}y = b \Rightarrow y = x^{-\frac{1}{3}}b \Rightarrow y^{\frac{3}{2}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}b\right)^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$$

この式を第 1 式に代入する。

$$a = x y^{\frac{3}{2}} = x \times x^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = a b^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow x = a^2 b^{-3}$$

よって

$$y = (a^2 b^{-3})^{-\frac{1}{3}} b = a^{-\frac{2}{3}} b \times b = a^{-\frac{2}{3}} b^2$$

となり、

$$p = \frac{-2}{3}$$

であることがわかる。

(2) $b = 2 \sqrt[3]{a^4} = 2 a^{4/3}$ とするとき、(1) の式より

$$\begin{aligned} x &= a^2 b^{-3} = a^2 \left(2 a^{\frac{4}{3}}\right)^{-3} = a^2 \times 2^{-3} \times a^{-4} = 2^{-3} a^{-2} \\ y &= a^{-\frac{2}{3}} b^2 = a^{-\frac{2}{3}} \left(2 a^{\frac{4}{3}}\right)^2 = a^{-\frac{2}{3}} \times 2^2 \times a^{\frac{8}{3}} = 2^2 \times a^2 \end{aligned}$$

となる。

a が $a > 0$ の範囲を動くとき、 $x, y > 0$ より相加平均と相乗平均の関係を
利用すると

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{xy} = \sqrt{2^{-3}a^{-2} \times 2^2 a^2} = \sqrt{2^{-1}} = 2^{-\frac{1}{2}}$$

よって $x+y \leq 2 \times 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ 。ここで $x+y = \sqrt{2}$ となるときは

$$x=y \Rightarrow 2^{-3}a^{-2} = 2^2 a^2 \Rightarrow a^4 = 2^{-5} \Rightarrow a = 2^{-\frac{5}{4}}$$

となる。よって $q = \frac{-5}{4}$ とすると、 $a = 2^q$ のとき $x+y$ は最小値 $\sqrt{2}$ を
とる。

[2] の正解

ス	セソ	タ	チツ	テ
2	-3	2	-2	3
トナ	ニ	ヌ	ネノ	ハ
-2	2	2	-5	4