2015年度センター試験　数学２Ｂ

第２問

⑴　関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(x)$ を求めよう。h が 0 でないとき、x が a から $a+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は $\boxed{\text{ア}}+\dfrac{h}{\boxed{\text{イ}}}$ である。したがって、求める微分係数は

$$f'(x)=\lim_{h\to\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{ア}}+\frac{h}{\boxed{\text{イ}}}\right)=\boxed{\text{エ}}$$

である。

⑵ 放物線 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ を C とし、C 上に点 $P\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ をとる。ただし、$a>0$ とする。点 P における C の接線 l の方程式は

$$y=\boxed{\text{オ}}\ x-\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\ a^2$$

である。直線 l と x 軸との交点 Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},0\right)$ である。点 Q を通り l に垂直な直線を m とすると、m の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}\,x+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

直線 m と y 軸の交点を A とする。三角形 APQ の面積を S とおくと

$$S = \frac{a\,(a^2 + \boxed{セ})}{\boxed{ソ}}$$

となる。また、y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積を T とおくと

$$T = \frac{a\,(a^2 + \boxed{タ})}{\boxed{チツ}}$$

となる。

$a > 0$ の範囲における $S - T$ の値について調べよう。

$$S - T = \frac{a\,(a^2 - \boxed{テ})}{\boxed{トナ}}$$

である。$a > 0$ であるから、$S - T > 0$ となるような a のとり得る値の範囲は $a > \sqrt{\boxed{ニ}}$ である。また、$a > 0$ のときの $S - T$ の増減を調べると、$S - T$ は $a = \boxed{ヌ}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハヒ}}$ をとることがわかる。

---

(1) h が 0 でないとき、x が a から $a + h$ まで変化するときの $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ の平均変化率は

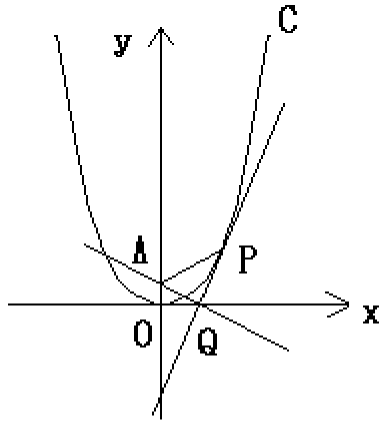
$$\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2}(a+h)^2 - \frac{1}{2}a^2\right\} = \frac{1}{2h}(2ah + h^2) = \boldsymbol{a} + \frac{h}{\mathbf{2}}$$

したがって、求める微分係数は

$$f'(a) = \lim_{h \to \mathbf{0}} \left(a + \frac{h}{2}\right) = \boldsymbol{a}$$

である。

(2)



C 上に点 $P\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ をとる。ただし、$a > 0$ とする。$f'(x) = x$ より点 P における C の接線 l の方程式は

$$y - \frac{1}{2}a^2 = a\,(x - a) \Rightarrow y = \boldsymbol{a}\,x - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,a^2$$

である。直線 l と x 軸との交点 Q は y 座標が 0 であることから、

$$a\,x - \frac{1}{2}\,a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

よって、点 Q の座標は $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}, 0\right)$ である。点 Q を通り l に垂直な直線を m とすると、m の傾きが $-\frac{1}{a}$ であるため、m の方程式は

$$y = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right) \Rightarrow \ y = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{a}}\ x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

である。

直線 m と y 軸の交点を A とする。A の座標は $\left(0\,,\ \frac{1}{2}\right)$ である。三角形 APQ は $\angle AQP = 90\,°$ となる直角三角形である。

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+1}$$

$$AQ = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+1}$$

であることから、三角形 APQ の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2} \times AQ \times PQ = \frac{a}{\mathbf{8}}(a^2 + \mathbf{1})$$

となる。また、y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形について、線分 AP の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}}{a}x \ \Rightarrow \ y = \frac{a^2-1}{2a}x + \frac{1}{2}$$

である。よって、この面積を T とおくと

$$T = \int_0^a \left\{\frac{a^2-1}{2\,a}\ x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ x^2\right\} dx$$

$$
=\frac{a^2-1}{2\,a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a+\frac{1}{2}\,[x]_0^a-\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a
$$

$$
=\frac{a(a^2-1)}{4}+\frac{a}{2}-\frac{a^3}{6}
$$

$$
=\frac{a(a^2+\mathbf{3})}{\mathbf{12}}
$$

となる。

$a>0$ の範囲における $S-T$ の値について調べよう。

$$
S-T=\frac{a}{\mathbf{8}}(a^2+\mathbf{1})-\frac{a(a^2+\mathbf{3})}{\mathbf{12}}=\frac{a(a^2-\mathbf{3})}{\mathbf{24}}
$$

である。$a>0$ であるから、

$$
S-T>0 \ \Rightarrow\ a^2-3>0 \ \Rightarrow\ a>\sqrt{\mathbf{3}}
$$

である。また、

$$
g(a)=\frac{a(a^2-3)}{24}
$$

とすると、

$$
g'(a)=\frac{1}{24}(3\,a^2-3)=\frac{1}{8}(a^2-1)
$$

となるため、$a>0$ のときの $S-T$ の増減を調べると以下の通りになる。

a	0		1	
$g'(a)$	$-$		0	$+$
$g(a)$	減少		最小	増加

よって、$S-T$ は $a=\mathbf{1}$ で最小値 $\dfrac{-2}{24}=\dfrac{\mathbf{-1}}{\mathbf{12}}$ をとることがわかる。

第２問の正解

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
$\boldsymbol{a}$	**2**	**0**	a	a	**2**	a
ク	ケコ	サ	シ	ス	セ	ソ
2	**－1**	a	**1**	**2**	**8**	**1**
タ	チツ	テ	トナ	ニ	ヌネ	ノハ
3	**12**	**3**	**24**	**1**	**－1**	**12**